

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA

Propriedades de feixes Hermite-Bessel
não-difratantes generalizados

PAULO CESAR AGUIAR BRANDÃO FILHO

Maceió

Fevereiro de 2011

PAULO CESAR AGUIAR BRANDÃO FILHO

Propriedades de feixes Hermite-Bessel não-difratantes generalizados

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Física da Matéria
Condensada da Universidade Federal de
Alagoas como requisito para a obtenção do
título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Jandir Miguel Hickmann

AGRADECIMENTOS

Desde que iniciei esse trabalho em 2007, várias pessoas contribuíram de forma direta e indireta para a realização dos resultados que vocês irão ver nessa dissertação. Em primeiro lugar eu agradeço à minha família que, como sempre, jamais deixou de me apoiar nos meus projetos. Sem dúvida, a maior ajuda para que eu conseguisse realizar meus objetivos, veio deles. Agradeço ao meu orientador Jandir pelos 4 anos de orientação e discussões sobre física (e natureza, em geral) que cada vez mais me levavam a aprender mais. Devo uma menção especial ao Alcenísio que me ajudou na parte experimental com toda a paciência possível. Ao pessoal da Bat-Caverna pelas distrações essenciais. Agradeço também à todas as pessoas do grupo Optma e ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Esse trabalho é dividido em duas partes. Na primeira estudaremos algumas propriedades de uma classe de feixes não-difratantes conhecidos como feixes Hermite-Bessel. Mostraremos teoricamente e experimentalmente suas propriedades de auto-imagem e de auto-reconstrução após passar por um obstáculo no seu trajeto de propagação. A análise do espectro angular é usada para entender os efeitos. Na segunda parte deste trabalho, generalizaremos a esfera de Poincaré para feixes Bessel de ordem maior que 2. Com isso, introduziremos os feixes Hermite-Bessel de altas ordens que aparecerão naturalmente na decomposição e ocuparão os lugares do equador na esfera de Poincaré.

Palavras-chaves: Hermite-Bessel, esfera de Poincaré, difração, momento angular orbital.

ABSTRACT

This work is divided in two parts. In the first part, we will study some properties of a nondiffractive class of beams known as Hermite-Bessel beams. We will show both, theoretically and experimentally, their self-imaging and self-healing properties after it passes through an obstacle placed on the path of propagation. The angular spectrum analysis is employed to understand the effects involved. In the second part of this work, we generalize the Poincaré sphere for Bessel beams of order higher than 2. Then, we introduce high order Hermite-Bessel beams which show up naturally in the decomposition and take place at the Equator on the Poincaré sphere.

Keywords: Hermite-Bessel, Poincaré sphere, diffraction, orbital angular momentum.

Lista de Figuras

1.1	Comparação da intensidade no ponto central de um feixe Bessel com um feixe Gaussiano em função da distância de propagação z . Linha pontilhada indica a intensidade calculada para o feixe Gaussiano, e a linha sólida indica a intensidade calculada para o feixe Bessel. Retirado de [1].	3
1.2	Aparato experimental usado por Durnin et al para gerar o feixe Bessel. Retirado de [4].	4
1.3	Comparação da intensidade do ponto central do feixe Bessel em função com o feixe Gaussiano. (a) Teoria e (b) Experimento. Retirado de [4].	5
1.4	Esquema em blocos ilustrando o algoritmo usado pelo método do espectro angular. FFT significa Fast Fourier Transform e IFFT a transformada de Fourier inversa. Blocos azuis indicam o espaço recíproco e os blocos verdes o espaço real.	9
1.5	Perfil transversal de intensidade do feixe Bessel descoberto por Durnin. A legenda à direita será padrão em todos os gráficos da dissertação, e, por isso, será omitida daqui em diante.	12
1.6	Distribuição dos vetores de onda (para um feixe não difratante) no espaço das frequências espaciais.	13

1.7	Região de existência do feixe Bessel. Note a extensão finita das “ondas planas” que se propagam na superfície de um cone.	15
1.8	Ilustração do comprimento máximo de propagação do feixe Bessel. Retirado de [1].	16
1.9	Perfil transversal de intensidade para as altas ordens de feixe Bessel. a) $l = 1$, b) $l = 2$, c) $l = 3$ e d) $l = 4$	17
1.10	Modos Hermite-Bessel. a) HB_{01} e b) HB_{10}	19
1.11	Decomposição do feixe Bessel de ordem ± 1 em termos dos modos Hermite-Bessel. Retirado de [12]	19
2.1	Perfil inicial do feixe que irá reconstruir seu perfil de intensidade em planos discretos formado por uma superposição de feixes Hermite-Bessel com diferentes vetores de ondas transversais.	24
2.2	Resultado da simulação demonstrando o efeito de auto-imagem dado pela superposição coerentes dos dois modos HB_{10} e HB_{01} com diferentes vetores de onda transversais. As figuras de (a) - (h) indicam perfis transversais de intensidade para diferentes valores crescentes de z	26
2.3	Transformada de Fourier do campo inicial em $z = 0$	27
2.4	Resultados experimentais dos modos Hermite-Bessel de alta ordem. a) HB_{22} e b) HB_{11}	28
2.5	Resultados experimentais dos modos Hermite-Bessel de alta ordem. a) HB_{22} e b) HB_{11}	29
2.6	Holograma enviado ao modulador espacial utilizado para gerar o feixe com a propriedade de auto-imagem.	29

3.1	Esquema demonstrando a ““auto-reconstrução” de um feixe não-difratante.	31
3.2	Esquema demonstrando a auto-reconstrução de um feixe não-difratante.	32
3.3	Aparato experimental utilizado para demonstrar a auto-reconstrução de um feixe não-difratante.	33
3.4	Esquema demonstrando a ““auto-reconstrução” de um feixe não-difratante.	34
4.1	Elipse usada para caracterizar os estados de polarização da luz.	37
4.2	Esfera de Poincaré para os estados de polarização da luz.	38
4.3	Variação espacial da fase em um plano $z = cte$. (a) Feixe possuindo momento angular orbital $l = 1$. (b) Onda plana.	39
4.4	Resultados experimentais para determinação da carga topológica de um feixe. (a) Padrão de intensidade resultante da interferência de uma onda plana colinear. Retirado de [8]. (b) Padrão de intensidade do feixe após passar por uma abertura triangular. Retirado de [9] . . .	40
4.5	Esfera de Poincaré para os estados de (a) polarização e de (b) momento angular orbital da luz. Retirado de [25].	41
4.6	Esfera de Poincaré para feixes Bessel de ordem ± 1	43
4.7	Modos Hermite-Bessel de alta ordem. a) HB_{22} e b) HB_{11}	45
4.8	Resultados experimentais dos modos Hermite-Bessel de alta ordem. a) HB_{22} e b) HB_{11} , utilizando um modulador espacial de luz.	45
4.9	Resultados experimentais dos modos Hermite-Bessel de alta ordem. a) HB_{22} e b) HB_{11}	46

4.10	Modo Hermite-Bessel para $l = 3$. (a) Intensidade para o espectro angular A_{\cos}^3 . (b) Intensidade para o espectro angular A_{\sin}^3 e (c) Feixe Bessel de ordem 2 obtido com o espectro angular da superposição de (a) e (b) com uma diferença de fase de $\pi/2$	48
4.11	Resumo da generalização da esfera de Poincaré para feixes Bessel de ordem l . A figura também ilustra as combinações lineares dos modos Hermite-Bessel de alta ordem necessárias para obter os feixes Bessel.	49

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Feixes não-difratantes	1
1.2	O espectro angular de ondas planas	4
1.2.1	Restrição em $A(k_x, k_y)$	9
1.2.2	Por que o feixe não se difrata?	12
1.3	Feixes Bessel de alta ordem	15
1.3.1	Modulando $\Lambda(\phi)$	16
1.4	Feixes Hermite-Bessel	17
1.4.1	Decomposição dos Feixes Bessel	18
1.4.2	Modulando $\Lambda(\phi)$ (2)	20
1.5	Conclusão	21
2	Auto-imagem em feixes Hermite-Bessel	22
2.1	Teoria	23
2.2	Experimento	26
2.3	Conclusão	27

3	Auto-reconstrução em Feixes Hermite-Bessel	30
3.1	Teoria	30
3.2	Experimento	33
4	Feixes Hermite-Bessel de alta ordem	35
4.1	A esfera de Poincaré	35
4.2	Momento angular orbital da luz	38
4.3	Esfera de Poincaré para feixe Bessel de ordem ± 1	42
4.4	Esfera de Poincaré para feixe Bessel de ordem ± 2	43
4.5	Espectro angular dos feixes Hermite-Bessel de alta ordem	46
4.6	Conclusão	48
5	Conclusões e Perspectivas	50
	Referências	51
	Apêndice	54

Capítulo 1

Introdução

O conceito de feixe não-difratante é introduzido inicialmente, dando assim a base para o resto da dissertação. Logo após, apresentaremos os feixes Bessel, descobertos por Durnin em 1987, cujas equações e propriedades serão usadas para introduzir os feixes Hermite-Bessel e suas características (seção 1.3), que serão o tema principal dessa dissertação.

O espectro angular de ondas planas é utilizado para descrever todos os efeitos apresentados nesta dissertação (invariância na propagação, auto-imagem e auto-reconstrução de um feixe), por oferecer uma visão geométrica dos vetores de onda que nos dará uma explicação física para os efeitos, além de ser um método relativamente simples de se implementar numericamente, pois está relacionado com a transformada de Fourier cujos algoritmos de fast-Fourier-transform podem ser facilmente aplicados.

1.1 Feixes não-difratantes

Em 1987, J. Durnin publicou um artigo intitulado “Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory” [1] (Soluções exatas para feixes não-difratantes. I. A teoria escalar) na qual discutiu-se uma solução da equação de Helmholtz cujo perfil

de intensidade não dependia da distância de propagação z . A solução encontrada por Durnin foi

$$E(r, t) = \exp(i[k_z z - \omega t])J_0(k_\rho \rho) \quad (1.1)$$

onde k_z é o vetor de onda na direção de propagação, ω é a frequência angular do feixe, k_ρ é o vetor de onda transversal e $J_0(x)$ é a função de Bessel do primeiro tipo de ordem zero. Se interpretarmos a intensidade de um campo escalar U como sendo U^*U , vemos claramente que $|E(z = 0, t)|^2 = |E(z, t)|^2$ justificando o adjetivo não-difratante. No artigo, Durnin compara distâncias de propagação entre o feixe (1.1) e um do tipo Gaussiano. Na figura (1.1), retirada do artigo, é mostrada a intensidade do ponto central do feixe (1.1) em função da distância de propagação z comparada com a de um feixe Gaussiano. Note que, apesar da oscilação (oriunda da extensão finita da janela computacional), o feixe mantém seu valor de intensidade no centro diferente de zero por uma distância muito maior que o feixe Gaussiano com a mesma distribuição de largura espacial.

O aparato experimental sugerido por Durnin para gerar o feixe é mostrado na figura (1.2). Uma onda plana atravessa uma lente de distância focal f após passar por uma abertura em forma de anel com diâmetro d e espessura Δd (ficará mais claro adiante o porque disso). Com um detector é possível medir o valor da intensidade no ponto central do feixe, em função da distância de propagação z . O resultado experimental é mostrado na figura (1.3). A intensidade no ponto central do feixe é medida em função da distância de propagação. Na parte (a) é mostrada a simulação e na parte (b) o resultado experimental. Observe o decaimento da intensidade no ponto central em comparação com o feixe Gaussiano corroborando as simulações numéricas.

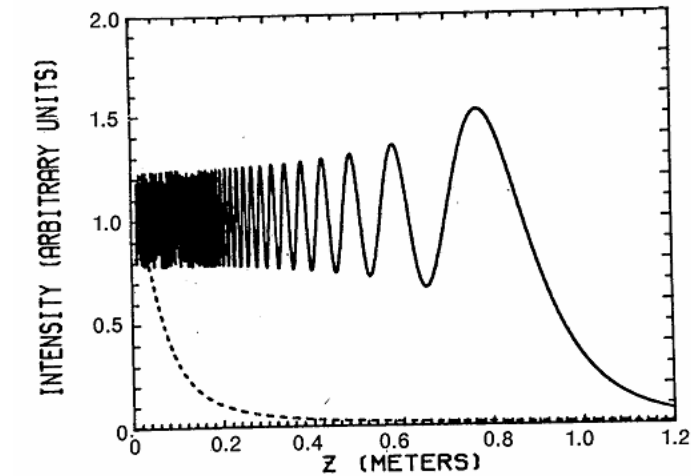


Figura 1.1: Comparação da intensidade no ponto central de um feixe Bessel com um feixe Gaussiano em função da distância de propagação z . Linha pontilhada indica a intensidade calculada para o feixe Gaussiano, e a linha sólida indica a intensidade calculada para o feixe Bessel. Retirado de [1].

Note que $E(r, t)$ pode representar uma componente do campo elétrico ou magnético. O caráter vetorial do campo eletromagnético bem como sua polarização são ignorados nessa dissertação. Para saber limites da validade da aproximação escalar veja [2] ou [3], por exemplo.

Vamos discutir várias propriedades do, então chamado, “Feixe Bessel” descrito por (1.1), mas primeiro mostraremos como podemos chegar na solução (1.1) encontrada por Durnin, pois assim introduziremos o espectro angular de ondas planas e a sua interpretação quando aplicado ao caso de feixes não difratantes.

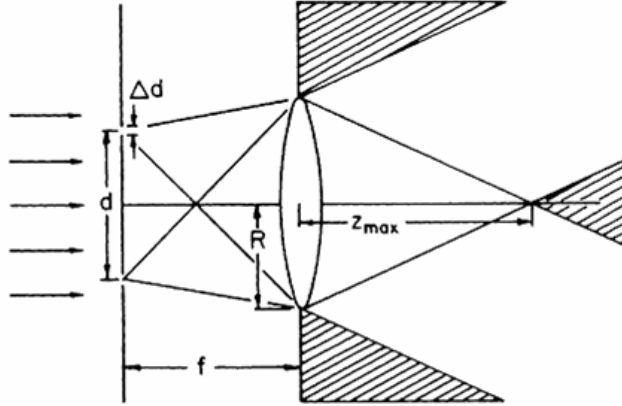


Figura 1.2: Aparato experimental usado por Durnin et al para gerar o feixe Bessel. Retirado de [4].

1.2 O espectro angular de ondas planas

Considere a equação da onda

$$c^2 \nabla^2 U(r, t) = \frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

onde $U(r, t)$ representa uma componente do campo eletromagnético e c é a velocidade da luz no vácuo. Considerando feixes monocromáticos (o caso geral pode ser obtido por uma análise de Fourier) podemos escrever $E(r, t) = E(r)e^{i\omega t}$, donde ficamos com

$$\nabla^2 E(r) + k^2 E(r) = 0 \quad (1.3)$$

onde $k = \omega/c$ é o modulo do vetor de onda do feixe.

A equação (1.3) é conhecida como **Equação de Helmholtz**. Se soubermos a distribuição do campo em z_0 , por exemplo, a equação de Helmholtz nos permite calcular o perfil do feixe em qualquer outro plano $d > z_0$, como veremos.

Uma linha de ataque muito usada pelos físicos para resolver equações diferenciais parciais é o método de separação de variáveis, e poderíamos muito bem

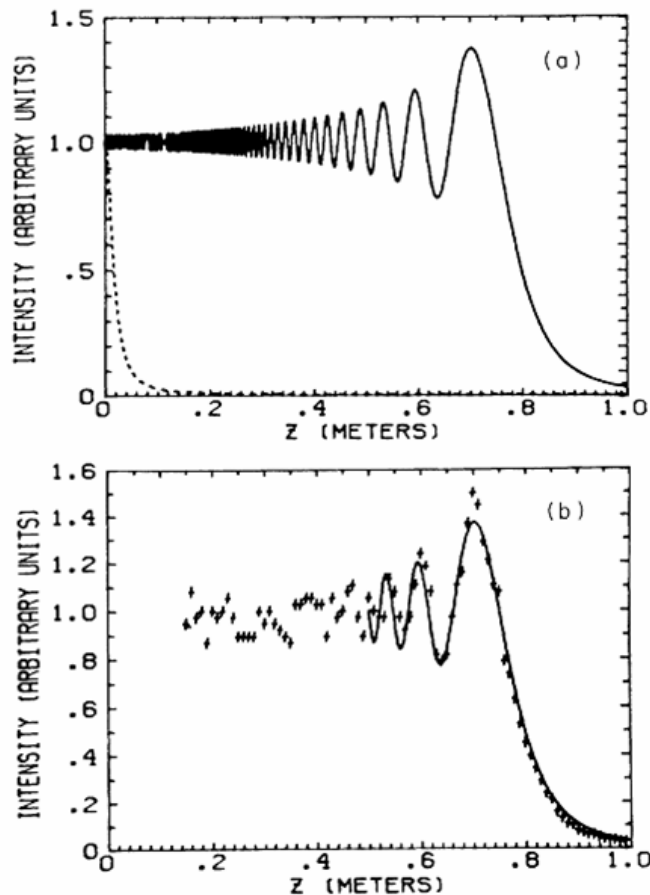


Figura 1.3: Comparação da intensidade do ponto central do feixe Bessel em fun com o feixe Gaussiano. (a) Teoria e (b) Experimento. Retirado de [4].

usar esse método para chegar à solução encontrada por Durnin, porém o método que aqui iremos descrever além de ser, de certa forma, mais geral, leva a uma interpretação física muito importante entre as componentes dos vetores de onda dos feixes servindo para caracterizar feixes não-difratantes.

A análise consiste em supor a priori que o feixe pode ser escrito na forma

$$E(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y \quad (1.4)$$

onde $A(k_x, k_y, z)$ é o espectro angular e (k_x, k_y, k_z) são as **frequências espaciais** características do feixe em questão.

Vamos ver como fica a equação (1.4) quando a operamos com ∇^2 :

$$\begin{aligned}\nabla^2 E(r, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y) \nabla^2 [e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}] dk_x dk_y \\ \nabla^2 E(r, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y) [-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)] e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y\end{aligned}$$

mas

$$\nabla^2 E(r) = -k^2 E(r)$$

logo,

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad (1.5)$$

Concluimos, então, que as frequências espaciais não são independentes mas satisfazem a relação (1.5).

Para entender o significado físico da equação (1.4) suponha que estejamos fazendo uma superposição de várias ondas planas se propagando em diferentes direções mas todas com a mesma frequência angular temporal, então para uma onda plana podemos escrever

$$u_i = u_{i0} e^{i(k_x x + k_y y \pm (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2} z)}$$

onde u_i é a i -ésima onda plana, u_{i0} é a amplitude da i -ésima onda plana e a relação (1.5) foi usada. Então, para uma distribuição contínua de vetores de ondas descrita por uma função $A(k_x, k_y)$ teríamos não um somatório, mas uma integral

$$\begin{aligned}U &= \iint A(k_x, k_y) u_i dk_x dk_y \\ U &= \iint A(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y \pm (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2} z)} dk_x dk_y\end{aligned}$$

que é a equação (1.4).

Logo, podemos interpretar (1.4) como uma superposição de ondas planas com uma distribuição de vetores de onda descritas pelo espectro angular $A(k_x, k_y)$. Veremos adiante que se um feixe é não-difratante, restrições devem ser impostas nesta função.

Para nossa análise teórica ser concluída precisamos encontrar as relações entre as distribuições dos campos em planos diferentes perpendiculares à direção de propagação do feixe. Isto é, usaremos a equação de Helmholtz junto com o espectro angular para extrair informações de fase e de amplitude do feixe em questão.

Começaremos escrevendo o campo na seguinte forma

$$E(r) = \iint A(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (1.6)$$

Reconhecemos a equação (1.6) como uma **transformada de Fourier em 2 dimensões**, sua inversa é dada por

$$A(k_x, k_y) = \iint E(r) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (1.7)$$

Para obter uma relação entre os campos em dois planos diferentes, podemos escrever

$$E(x, y, z) = \iint A(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (1.8)$$

substituindo na equação de Helmholtz

$$\nabla^2 E(x, y, z) = \iint \left[\frac{\partial^2 A(k_x, k_y, z)}{\partial z^2} - (k_x^2 + k_y^2) \right] e^{i(k_x x + k_y y)}$$

mas

$$\nabla^2 E(x, y, z) = -k^2 E(x, y, z)$$

logo

$$\iint \left[\frac{\partial^2 A(k_x, k_y, z)}{\partial z^2} + (k^2 - (k_x^2 + k_y^2)) \right] e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 A(k_x, k_y, z)}{\partial z^2} + k_z^2 A(k_x, k_y, z) = 0$$

cuja solução vale

$$A(k_x, k_y, z) = A(k_x, k_y) e^{ik_z z} \quad (1.9)$$

onde $A(k_x, k_y)$ é o espectro angular do feixe em $z = 0$. A equação (1.9) nos diz que para calcular o espectro angular do feixe em z , devemos multiplicar o espectro angular em $z = 0$ pelo fator $e^{ik_z z}$, também chamado de **propagador**. Substituindo (1.9) em (1.6) temos o importante resultado

$$E(r) = \iint A(k_x, k_y) e^{i[k^2 - (k_x^2 + k_y^2)]^{1/2} z} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (1.10)$$

A equação (1.10) possui muitas propriedades interessantes, a mais evidente talvez seja o fato de que se $k^2 < k_x^2 + k_y^2$, a primeira exponencial deixa de ser imaginária e se torna real pura, caracterizando ondas não-homogêneas, isto é, ondas cuja amplitude diminui com a distância z . Então se quisermos ter **ondas propagantes** devemos restringir nossas frequências espaciais de tal modo que $k^2 > k_x^2 + k_y^2$, mas como iremos olhar apenas campo distante ($\lambda \gg z$) não iremos nos preocupar com isso. Outra observação importante acerca de (1.10) é o fato de não ter sido feita nenhuma outra aproximação além da escalar, implicando que dentro dos limites desta, a equação tem uma forma exata.

Nosso algoritmo agora está pronto. Sabendo a distribuição $E(x, y, z = 0)$, calculamos a transformada de Fourier para encontrar $A(k_x, k_y)$ e depois usamos (1.10) para calcular $E(x, y, z)$, um esquema em blocos é ilustrado na figura 1.4.

Agora vamos impor a restrição para um feixe não se difratar e verificar o que o método do espectro angular nos diz a respeito da função $A(k_x, k_y)$

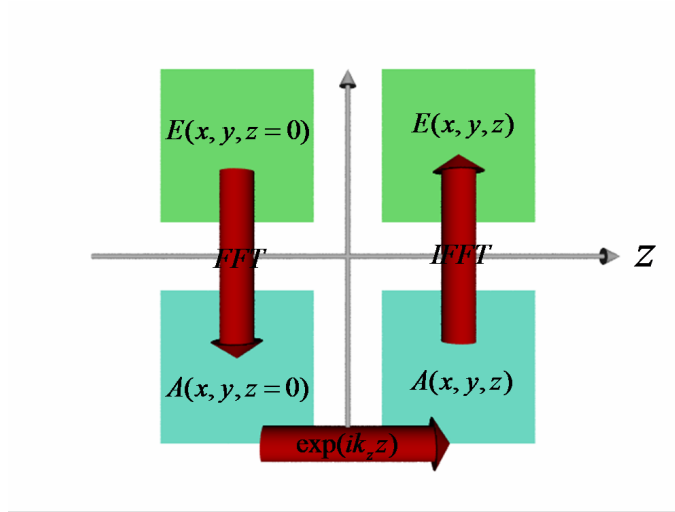


Figura 1.4: Esquema em blocos ilustrando o algoritmo usado pelo método do espectro angular. FFT significa Fast Fourier Transform e IFFT a transformada de Fourier inversa. Blocos azuis indicam o espaço recíproco e os blocos verdes o espaço real.

1.2.1 Restrição em $A(k_x, k_y)$

A idéia essencial para que o feixe seja não-difratante é a de que seu perfil transversal de intensidade mantenha-se inalterado durante a propagação. Em termos matemáticos podemos descrever isso na seguinte forma

$$|E(x, y, z = 0)|^2 = |E(x, y, z)|^2 \quad (1.11)$$

ou usando (1.10)

$$\left| \iint A(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \right|^2 = \left| \iint A(k_x, k_y) e^{i[k^2 - (k_x^2 + k_y^2)]^{1/2} z} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \right|^2 \quad (1.12)$$

Uma solução para a equação acima é obtida fazendo

$$[k^2 - (k_x^2 + k_y^2)]^{1/2} = \frac{2\pi m}{z}$$

com $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Note que agora k_z não pode assumir qualquer valor contínuo nem qualquer valor discreto, mas somente aqueles que obedeçam a restrição acima.

Se introduzirmos $k_\rho = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ como sendo o vetor de onda transversal à direção de propagação z e se lembrarmos que $k^2 = k_\rho^2 + k_z^2$ notamos que k_ρ também não pode assumir qualquer valor contínuo, porque assim nem sempre teríamos a relação $k_{zm}^2 = k^2 - k_\rho^2$ sendo satisfeita. Logo, a relação para feixes não-difratantes é dada por

$$k^2 = k_{\rho m}^2 + k_{zm}^2 \quad (1.13)$$

com $k_{\rho m}^2$ e k_{zm}^2 assumindo valores discretos.

Geometricamente, no plano das frequências espaciais, k_ρ assumir valores discretos implica dizer que serão formados anéis com raios iguais a k_ρ . Tais anéis são chamados **anéis de Montgomery**[5].

Como introduziremos feixes com simetria cilíndrica, é conveniente trabalhar em coordenadas polares no plano transversal. No espaço real teremos

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

e no espaço das frequências

$$k_x = k_\rho \cos \phi$$

$$k_y = k_\rho \sin \phi$$

$$k_z = k_z$$

Efetando essas substituições em (1.10) ficamos com

$$E(r, \theta, z) = \iint A(k_\rho, \phi) e^{i[k^2 - k_\rho^2]^{1/2} z} e^{ik_\rho r \cos(\theta - \phi)} k_\rho dk_\rho d\phi \quad (1.14)$$

Mas vimos que o vetor de onda transversal deve ficar restrito em um anel se quisermos ter invariância de intensidade na propagação. Como a função $A(k_\rho, \phi)$ é contínua, podemos escrever

$$A(k_\rho, \phi) = \delta(k_\rho - k_{\rho 0})\Lambda(\phi) \quad (1.15)$$

Assim, encontramos a restrição para o espectro angular de feixes não-difratantes! Note que a função $\Lambda(\phi)$ é arbitrária, existindo, assim, uma infinidade de feixes com distribuição de fase e de amplitude diferentes.

Substituindo (1.15) em (1.14) ficamos com

$$E(r, \theta, z) = e^{i[k^2 - k_{\rho 0}^2]^{1/2}z} k_{\rho 0} \int_0^{2\pi} \Lambda(\phi) e^{ik_{\rho 0} r \cos(\theta - \phi)} d\phi \quad (1.16)$$

Vamos agora voltar para o feixe Bessel de Durnin. Essa equação é basicamente o ponto de partida do artigo. Vemos claramente que a condição $|E(r, \theta, z = 0)|^2 = |E(r, \theta, z)|^2$ é satisfeita qualquer que seja $\Lambda(\phi)$. Tomando então $\Lambda(\phi)$ independente de ϕ a equação fica

$$E(r, \theta, z) = e^{i[k^2 - k_{\rho 0}^2]^{1/2}z} k_{\rho 0} \int_0^{2\pi} e^{ik_{\rho 0} r \cos(\theta - \phi)} d\phi$$

ou, usando a identidade $J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iucos(v)} dv$

$$E(r, \theta, z) = E_0 J_0(k_\rho r) e^{ik_{z0} z} \quad (1.17)$$

que é a solução encontrada por Durnin, onde E_0 é uma constante. Na figura (1.5) é mostrado o perfil transversal de intensidade do feixe Bessel.

Vimos que o uso do espectro angular nos permite obter uma infinidade de feixes não-difratantes dependendo da forma da função $\Lambda(\phi)$. Antes de apresentar os feixes Bessel de alta ordem (e, por conseguinte, os feixes Hermite-Bessel), porém,

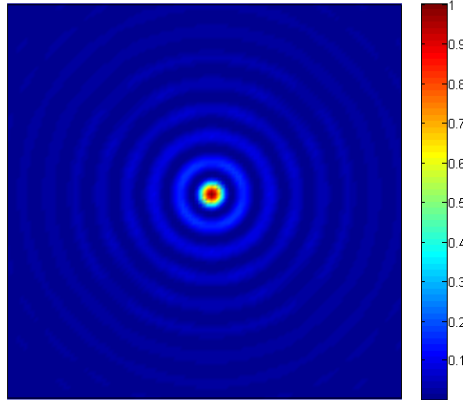


Figura 1.5: Perfil transversal de intensidade do feixe Bessel descoberto por Durnin. A legenda à direita será padrão em todos os gráficos da dissertação, e, por isso, será omitida daqui em diante.

precisamos compreender a física por trás do fenômeno da invariância na propagação desses feixes.

1.2.2 Por que o feixe não se difrata?

É essencial entender a idéia por trás da descrição dada pelo espectro angular, pois será de importância fundamental no entendimento da auto-reconstrução de feixes após passarem por obstáculos.

Vimos que o confinamento da componente transversal do vetor de onda num anel no espaço das frequências é a condição suficiente para que o feixe seja não-difratante. Mas o que implica, na descrição física da onda, um vetor de onda transversal ser confinado num anel de raio k_ρ ? Para responder essa pergunta, observe a figura (1.6). Nela notamos que se a componente k_ρ é confinada num anel, então \vec{k} deve ficar confinado em um cone. Em outras palavras, as infinitas ondas planas que compõem o espectro angular deverão todas terem o seu vetor de onda distribuído

numa superfície cônica.

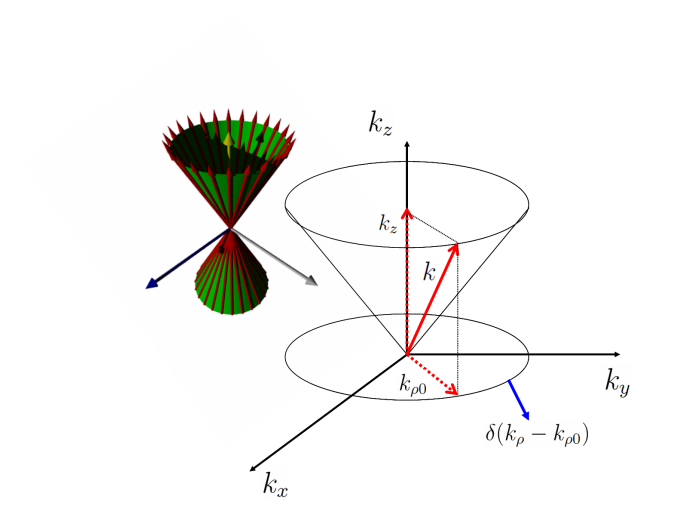


Figura 1.6: Distribuição dos vetores de onda (para um feixe não difratante) no espaço das frequências espaciais.

Vamos ver como isso funciona com um exemplo simples utilizando o feixe Bessel de ordem zero. Suponha que façamos uma superposição de várias ondas planas, todas com vetores de onda na superfície de um cone orientado como mostra a figura (1.6), seja $\vec{k} = k(\sin\theta_0\cos\phi, \sin\theta_0\sin\phi, \cos\theta_0)$ o vetor de onda escrito em coordenadas esféricas, θ_0 é o ângulo de abertura do cone e ϕ o ângulo azimutal da onda. Considere agora um conjunto de ondas planas todas com amplitude $A d\phi$ e vetores de propagação \vec{k} com θ_0 sendo o mesmo para cada onda. Podemos escrever para cada uma

$$Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} d\phi$$

ou em coordenadas esféricas

$$Ae^{ik(x\sin\theta_0\cos\phi + y\sin\theta_0\sin\phi + z\cos\theta_0)} d\phi$$

Usando $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ ficamos com

$$Ae^{ik(\rho \cos \varphi \sin \theta_0 \cos \phi + \rho \sin \varphi \sin \theta_0 \sin \phi + z \cos \theta_0)} d\phi$$

Integrando em ϕ temos que

$$Ae^{ikz \cos \theta_0} \int_0^{2\pi} e^{ik\rho \sin \theta_0 (\cos \varphi \cos \phi + \sin \varphi \sin \phi)} d\phi$$

ou

$$Ae^{ikz \cos \theta_0} \int_0^{2\pi} e^{ik\rho \sin \theta_0 \cos(\varphi - \phi)} d\phi$$

usando a identidade $J_l(u) = \frac{i^{-l}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ilv} e^{iu \cos(v)} dv$, resulta em

$$Ae^{ikz \cos \theta_0} J_0(k\rho \sin \theta_0)$$

mas $k \cos \theta = k_z$ e $k \sin \theta_0 = k_\rho$, ficando assim

$$Ae^{ik_z z} J_0(k_\rho \rho)$$

que é o feixe Bessel de ordem zero! Concluimos assim que feixes não difratantes têm os vetores de onda no espectro angular confinados em superfícies cônicas no espaço das frequências espaciais.

Como no nosso mundo físico não existe energia infinita, não podemos criar feixes Bessel, apenas aproximações. As ondas planas do espaço de frequências têm uma região finita de existência, portanto os feixes sempre se propagarão com difração (pouca, porém, se comparado com um feixe gaussiano, por exemplo) como ilustra a figura 1.7. Na região de intersecção entre as ondas planas é onde aparecerá o feixe Bessel. Portanto existe uma relação entre o comprimento máximo da região de existência do feixe e o raio do anel no espaço das frequências espaciais, como mostra a figura 1.8.

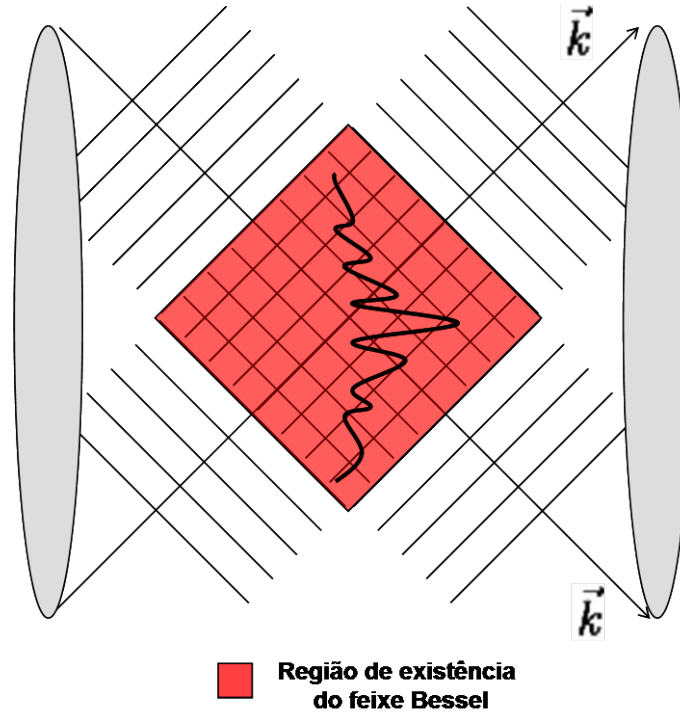


Figura 1.7: Região de existência do feixe Bessel. Note a extensão finita das “ondas planas” que se propagam na superfície de um cone.

Com uma aproximação da óptica geométrica e olhando para a figura 1.8, podemos concluir que

$$z_{max} = r / \tan\theta \quad (1.18)$$

ou

$$z_{max} = r \sqrt{(2\pi/k\rho\lambda)^2 - 1} \quad (1.19)$$

1.3 Feixes Bessel de alta ordem

Concluimos na seção anterior que tomando $\Lambda(\phi)$ independente de ϕ nos leva à solução encontrada por Durnin em 1987. Chamaremos essa solução de Feixe Bessel de ordem zero. O motivo ficará claro nessa seção.

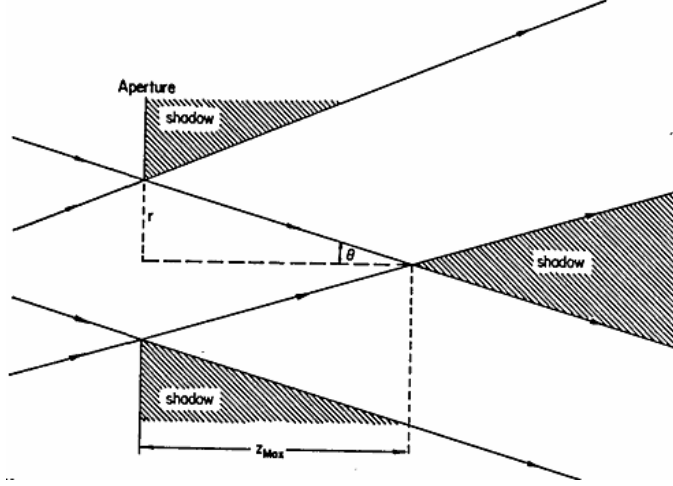


Figura 1.8: Ilustração do comprimento máximo de propagação do feixe Bessel. Retirado de [1].

1.3.1 Modulando $\Lambda(\phi)$

Tomando $\Lambda(\phi) = e^{il\phi}$ e substituindo na equação (1.16) ficamos com

$$E(r, \theta, z) = e^{i[k^2 - k_{\rho 0}^2]^{1/2} z} k_{\rho 0} \int_0^{2\pi} e^{il\phi} e^{ik_{\rho 0} r \cos(\theta - \phi)} d\phi$$

usando a identidade

$$J_l(u) = \frac{i^{-l}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ilv} e^{iu \cos(v)} dv$$

podemos escrever

$$E(r, \theta, z) = E_0 J_l(k_{\rho} r) e^{i[k^2 - k_{\rho 0}^2]^{1/2} z} e^{il\phi} \quad (1.20)$$

Nenhuma restrição foi imposta até agora nos valores que l pode assumir. Porém, devido a unicidade do campo em um ponto, isto é, fixando r e z devemos ter $E(r, \theta + 2\pi, z) = E(r, \theta, z)$, concluímos que l deve estar contido nos inteiros, pois

$$e^{il(\phi+2\pi)} = e^{il\phi}$$

implica que $e^{2\pi il} = 1$, donde segue que $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Veja que o feixe Bessel de ordem zero é um caso particular da equação (1.20) com $l = 0$. Por esse motivo, a solução (1.20) contém feixes Bessel de **altas ordens**. Na figura 1.9 é mostrado o perfil transversal de intensidade para várias ordens, isto é, para $l = 1, 2, 3$ e 4.

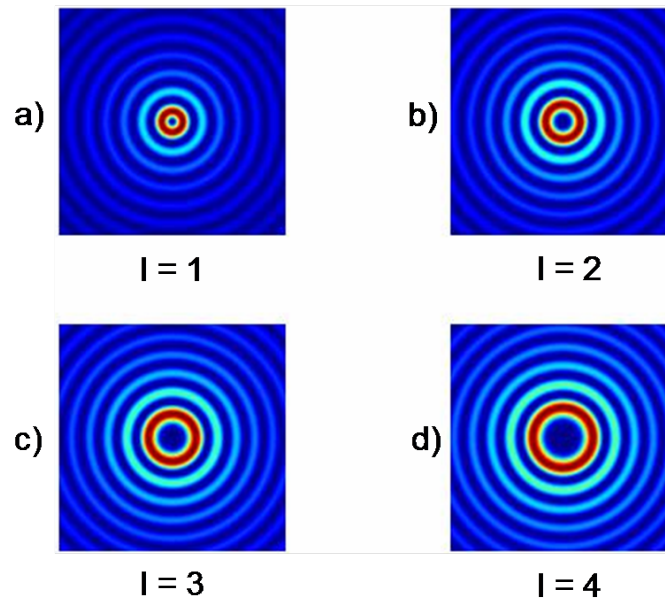


Figura 1.9: Perfil transversal de intensidade para as altas ordens de feixe Bessel. a) $l = 1$, b) $l = 2$, c) $l = 3$ e d) $l = 4$

Vale mencionar que existe uma relação entre os feixes Bessel (na verdade para qualquer feixe com fase azimutal do tipo $e^{il\phi}$ com l inteiro) e o momento angular orbital do campo eletromagnético, como foi demonstrado por Allen e colaboradores[7] em 1992. No capítulo quatro discutiremos esses aspectos mais detalhadamente enquanto criamos uma esfera de Poincaré para feixes com momento angular orbital.

1.4 Feixes Hermite-Bessel

Agora que já introduzimos os feixes Bessel de alta ordem, mostraremos que é possível decompô-los em uma nova classe de feixes, chamados Hermite-Bessel[11] cujas pro-

priedades serão o tema principal dessa dissertação.

1.4.1 Decomposição dos Feixes Bessel

Iniciaremos mostrando que os feixes Bessel de ordem $+1$ e -1 podem ser decompostos em termos de polinômios de Hermite. Considere um feixe Bessel escrito na seguinte forma

$$E_l(r, \theta, z) = E_0 J_l(k_\rho r) e^{il\phi} e^{ik_z z}$$

Vamos reescrever a equação na forma:

$$E_l(r, \theta, z) = E_0 \frac{J_l(k_\rho r)}{\rho^l} e^{ik_z z} (x + iy)^l$$

onde usamos $x = r \cos \phi$ e $y = r \sin \phi$ para reescrever o termo da fase azimutal.

Usando a seguinte relação de recorrência

$$\frac{2l}{\xi} J_l(\xi) = J_{l+1}(\xi) + J_{l-1}(\xi)$$

ficamos com

$$E_l(r, \theta, z) = \frac{k_\rho^l}{2l} \frac{e^{ik_z z}}{(k_\rho r)^{l-1}} [J_{l+1}(k_\rho r) + J_{l-1}(k_\rho r)] (x + iy)^l$$

Para o caso $l = \pm 1$ temos que:

$$E_{\pm 1}(r, \theta, z) = \pm \frac{k_\rho}{2} e^{ik_z z} \{ [J_0(k_\rho r) + J_2(k_\rho r)] x \pm i [J_0(k_\rho r) + J_2(k_\rho r)] y \}$$

onde usamos $J_l(\xi) = (-1)^l J_l(\xi)$ para $l = -1$. Podemos definir dois modos:

$$HB_{10} = e^{ik_z z} [J_0(k_\rho r) + J_2(k_\rho r)] H_1(x) H_0(y) \quad (1.21)$$

$$HB_{01} = e^{ik_z z} [J_0(k_\rho r) + J_2(k_\rho r)] H_0(x) H_1(y) \quad (1.22)$$

onde $H_n(\xi)$ é o polinômio de Hermite de ordem n . Esta nova classe de feixes foi denominada Hermite-Bessel[11]. Podemos escrever os feixes Bessel na seguinte forma:

$$BB_1 = k_\rho[HB_{10} + iHB_{01}]e^{ik_z z} \quad (1.23)$$

$$BB_{-1} = -k_\rho[HB_{10} - iHB_{01}]e^{ik_z z} \quad (1.24)$$

para ordens 1 e -1, respectivamente. Ou seja, um feixe Bessel de primeira ordem pode ser decomposto em uma superposição dos feixes Hermite-Bessel com uma diferença de fase de $\pi/2$. A figura 1.10 mostra o perfil transversal de intensidade dos dois modos enquanto a figura 1.11 ilustra a decomposição

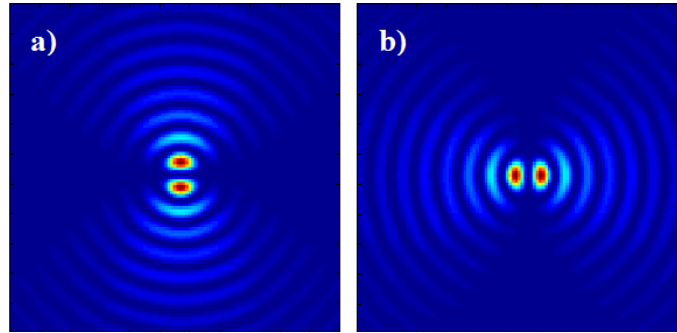


Figura 1.10: Modos Hermite-Bessel. a) HB_{01} e b) HB_{10} .

$$|BB_{\pm 1}|^2 = \left| HB_{10} \pm i HB_{01} \right|^2$$

Figura 1.11: Decomposição do feixe Bessel de ordem ± 1 em termos dos modos Hermite-Bessel. Retirado de [12]

1.4.2 Modulando $\Lambda(\phi)$ (2)

Na seção (1.2.1) mostramos como podemos obter os feixes Bessel fazendo $\Lambda(\phi) = e^{i\phi}$, isto é, modulando o anel no espaço das frequências espaciais. Iremos demonstrar agora como obter os feixes Hermite-Bessel utilizando o espectro angular.

Considere $\Lambda(\phi) = \cos \phi$. Substituindo na equação (1.16) temos

$$E(r, \theta, z) = e^{i[k^2 - k_{\rho 0}^2]^{1/2} z} k_{\rho 0} \int_0^{2\pi} \cos \phi e^{ik_{\rho 0} r \cos(\theta - \phi)} d\phi$$

ou

$$E(r, \theta, z) = e^{i[k^2 - k_{\rho 0}^2]^{1/2} z} k_{\rho 0} \cos \theta \int_0^{2\pi} \cos u e^{ik_{\rho 0} r \cos u} du$$

onde fizemos $u = \phi - \theta$. Mas

$$\int_0^{2\pi} \cos u e^{ik_{\rho 0} r \cos u} du = 2\pi i J_1(k_{\rho 0} r)$$

logo,

$$E(r, \theta, z) = E_0 e^{i[k^2 - k_{\rho 0}^2]^{1/2} z} J_1(k_{\rho 0} r) \cos \theta$$

mas utilizando as relações $\cos \theta = \frac{x}{r}$ e $\frac{J_1(k_{\rho 0} r)}{k_{\rho 0} r} = \frac{1}{2}[J_0(k_{\rho 0} r) + J_2(k_{\rho 0} r)]$ resulta na equação:

$$E(r, \theta, z) = E_0 e^{i[k^2 - k_{\rho 0}^2]^{1/2} z} [J_0(k_{\rho 0} r) + J_2(k_{\rho 0} r)] H_1(x) H_0(y)$$

que é o feixe HB_{10} . Mostramos assim que $\Lambda(\phi) = \cos \phi$ modula o anel de Montgomery de tal forma a produzir um dos modos do feixe Hermite-Bessel. Se tivéssemos começado com $\Lambda(\phi) = \sin \phi$, obteríamos, de forma análoga, o modo HB_{01} . No capítulo 4 mostraremos como produzir altas ordens modulando $\Lambda(\phi)$ de modo que suas combinações lineares reproduzam feixes Bessel de alta ordem.

1.5 Conclusão

Neste capítulo introduzimos a teoria de feixes não-difratantes. Mostramos que a função $A(k_x, k_y)$ não pode assumir qualquer forma se quisermos ter invariância na propagação. Vimos que o feixe de Durnin é um caso particular (ordem zero) de uma classe de feixes conhecidos como Feixes Bessel tomando $\Lambda(\phi) = e^{il\phi}$. Depois mostramos que os feixes Bessel podem ser decompostos em termos de uma nova classe de feixes denominados Hermite-Bessel cujas propriedades serão o tema principal dessa dissertação.

Capítulo 2

Auto-imagem em feixes Hermite-Bessel

Em 1836, Henry Fox Talbot observou que poderia construir padrões periódicos de intensidade, na direção de propagação da onda, ao passar luz por uma grade periódica[13]. Mais tarde, em 1881, Rayleigh[14] forneceu uma explicação para o fenômeno e concluiu que ondas planas repetem seu perfil de intensidade ao passar por grades periódicas em distâncias múltiplas de $2d^2/\lambda$, conhecida como distância de Talbot, onde d é a constante da grade e λ o comprimento de onda da luz incidente. No início dos estudos envolvendo auto-imagem somente o campo próximo foi tratado e por isso alguns autores falam em Imagens de Fresnel. Neste capítulo, entretanto, observaremos esse efeito em feixes não difratantes que se propagam no espaço livre e no campo distante através de uma superposição coerente de diferentes modos. Além disso, descreveremos o efeito utilizando a teoria escalar da difração. Para um tratamento vetorial da auto-imagem, veja[16].

2.1 Teoria

Usaremos a descrição do espectro angular para entender o fenômeno de auto-imagem. Vimos no capítulo 1 que uma condição para que nosso feixe seja não difratante é a de que

$$|E(x, y, z = 0)|^2 = |E(x, y, z)|^2 \quad (2.1)$$

isto é, a partir do momento em que criamos nosso perfil de intensidade em $z = 0$, ele deve se manter inalterado para qualquer $z > 0$.

Suponha que queiramos uma repetição do nosso perfil de intensidade a cada distância z_m . Uma forma de conseguir isso é impor que

$$|E(x, y, z + z_m)|^2 = |E(x, y, z)|^2 \quad (2.2)$$

ou seja, nosso perfil em $z + z_m$ deve ser igual ao perfil de intensidade em z . Note a diferença entre os vínculos impostos nas equações (2.1) e (2.2). Na primeira, nosso perfil deve permanecer o mesmo para qualquer $z > 0$, na segunda, em $z + z_m$ ele deve ser o mesmo que em z .

Substituindo (1.10) em (2.2) ficamos com

$$\left| \int \int A(k_x, k_y) e^{i[k^2 - k_\rho^2]^{1/2}(z+z_m)} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \right|^2 = \left| \int \int A(k_x, k_y) e^{i[k^2 - k_\rho^2]^{1/2}z} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \right|^2$$

A igualdade pode ser satisfeita se tomarmos

$$[k^2 - k_\rho^2]^{1/2} = \frac{2\pi m}{z_m} \quad (2.3)$$

Note que essa equação é idêntica à equação derivada para o caso de feixes não difratantes. Isso significa que os vetores de onda transversais do feixe que possui auto-imagem, são confinados em anéis no espaço das frequências espaciais. Agora podemos escrever para o espectro angular

$$A(k_x, k_y) = \sum_{m=1}^N \delta(k_\rho - k_{\rho m}) \Lambda_m(\phi) \quad (2.4)$$

Observe que agora temos um somatório de deltas de Dirac moduladas por uma função $\Lambda_m(\phi)$ para cada m . Vemos claramente que feixes não-difratantes formam um caso particular de feixes que possuem auto-imagem, i.e. com apenas um anel no espaço das frequências espaciais.

Para escolher nosso perfil de intensidade que será repetido pelo espaço, vamos fazer uma superposição de feixes Hermite-Bessel, isto é, vamos tomar $|HB_{10} + HB_{01}|^2$ como sendo nosso campo de entrada em $z = 0$, ilustrado na figura 2.1.

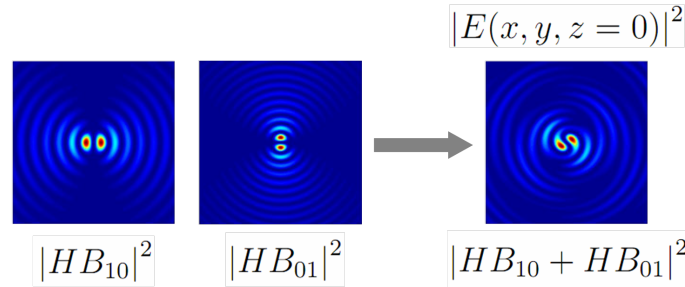


Figura 2.1: Perfil inicial do feixe que irá reconstruir seu perfil de intensidade em planos discretos formado por uma superposição de feixes Hermite-Bessel com diferentes vetores de ondas transversais.

Os vetores de onda transversais aos feixes são ligeiramente diferentes para criar 2 anéis no espaço das frequências espaciais. Se tivéssemos apenas somado os dois modos com os mesmos k_ρ , teríamos um modo HB_{45° [11].

Com um cálculo simples podemos mostrar que o período da repetição (isto é, o comprimento de Talbot) vale

$$z_m(\lambda, k_{\rho 1}, k_{\rho 2}) = \frac{\lambda m}{\sqrt{1 - (2\pi k_{\rho 2}/\lambda)^2} - \sqrt{1 - (2\pi k_{\rho 1}/\lambda)^2}} \quad (2.5)$$

onde $k_{\rho 1}$ e $k_{\rho 2}$ são os módulos dos vetores de onda transversais dos dois anéis no espaço das frequências, λ é o comprimento de onda da luz e $m = 1, 2, 3, \dots$. Por exemplo, se tomarmos $\lambda = 532.8$ nm e construirmos vetores de ondas transversais tais que $k_{\rho 1} = 0.5k$ e $k_{\rho 2} = 1.5k_{\rho 1} \approx 0.7k$ temos que $z_1 = 3.5\mu\text{m}$, mas se tomarmos $k_{\rho 1} = 0.2k$ e $k_{\rho 2} = 0.202k$, então $z_1 = 13$ cm.

Com nosso campo de entrada definido, basta utilizar o método do espectro angular para calcular a distribuição de intensidade em qualquer plano $z > 0$ e observar se teremos o efeito de auto-imagem. O resultado da simulação é ilustrado na figura 2.2.

Podemos observar na figura 2.2 que o perfil transversal de intensidade é repetido periodicamente através do espaço livre. Note que o feixe inicial possui, no espaço das frequências espaciais, **dois** anéis de Montgomery, diferindo do caso de feixes não-difratantes, como ilustra a figura 2.3. Assim, concluímos que feixes não-difratantes formam um caso particular de feixes difratantes com apenas um anel no espaço das frequências espaciais!

Uma aplicação direta desses efeitos seria utilizar a auto-imagem para criar padrões longitudinais periódicos em foto-resinas, por exemplo. Poderíamos, através da fórmula 2.5, calcular qual $k_{\rho m}$ e λ deveríamos ter para se obter um padrão que se repetisse a cada d metros. Efeitos semelhantes ocorrem com feixes Bessel como foi demonstrado em 1998[15].

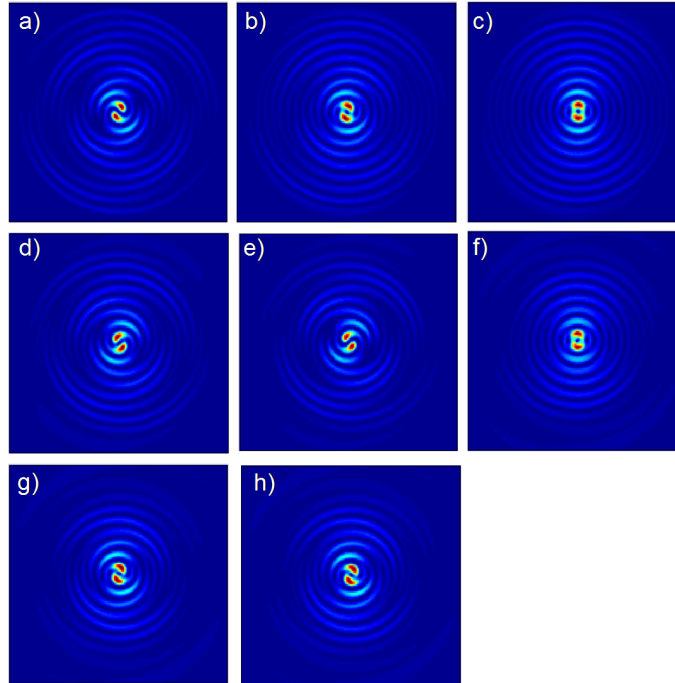


Figura 2.2: Resultado da simulação demonstrando o efeito de auto-imagem dado pela superposição coerentes dos dois modos HB_{10} e HB_{01} com diferentes vetores de onda transversais. As figuras de (a) - (h) indicam perfis transversais de intensidade para diferentes valores crescentes de z .

2.2 Experimento

O aparato experimental utilizado para fazer o experimento é mostrado na figura 2.4. O comprimento de onda de $532.8nm$ foi obtido por um laser de Argônio. Para criar o campo em $z = 0$ utilizamos um Modulador Espacial de Luz (Spatial Light Modulator SLM)

Após a reflexão da onda plana pelo modulador espacial, o feixe atravessa uma lente com distância focal de 1 m (ou seja, é feita a transformada de Fourier do plano do modulador). Várias ordens da difração são obtidas e o segundo filtro espacial serve para deixar passar apenas a ordem zero, que irá ser nosso feixe inicial. Depois com a ajuda de uma CCD (Charge-coupled device) capturamos várias

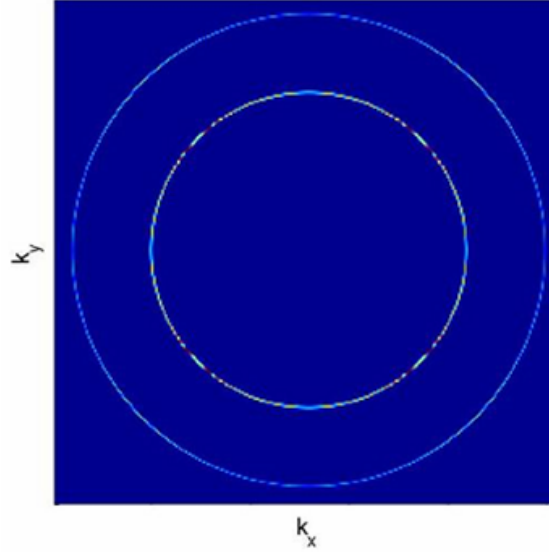


Figura 2.3: Transformada de Fourier do campo inicial em $z = 0$.

imagens que representam o padrão de intensidade ($|E(r, t)|^2$) do campo óptico em função da distância de propagação. Os resultados experimentais são mostrados na figura 2.5. Uma boa concordância é obtida com as simulações numéricas e definitivamente concluímos que superposições coerentes de feixes Hermite-Bessel possuem efeitos de auto-imagem no espaço livre. Observamos que nosso perfil transversal de intensidade se repetiu por uma distância de aproximadamente 49 cm, isto é, $z_1 = 49$ cm, essa é a distância entre as imagens tiradas de (a) e (h) na figura 2.5. O holograma utilizado para gerar o perfil inicial no modulador espacial de luz é mostrado na figura 2.6

2.3 Conclusão

Neste capítulo, desenvolvemos a teoria que descreve o efeito da auto-imagem a partir de uma análise do espectro angular. A partir de uma superposição coerente de dois feixes Hermite-Bessel com diferentes vetores de onda transversais, mostramos

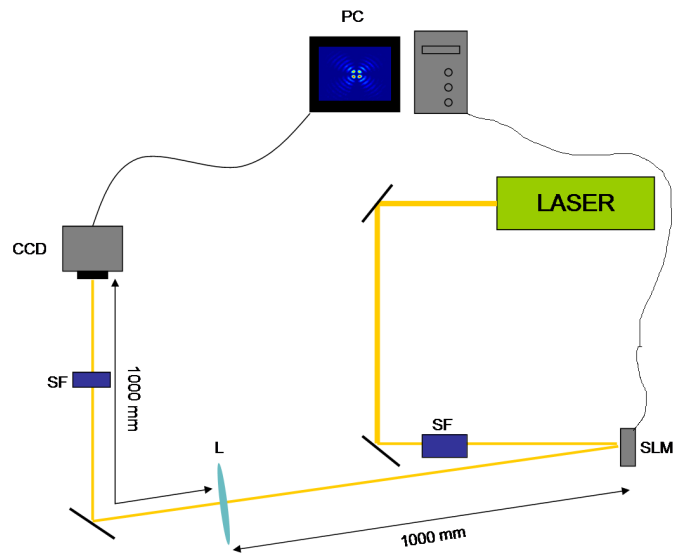


Figura 2.4: Resultados experimentais dos modos Hermite-Bessel de alta ordem. a) HB_{22} e b) HB_{11} .

que o perfil resultante possui uma propriedade de auto-imagem, isto é, seu perfil transversal de intensidade se repete em planos múltiplos de um comprimento de Talbot. Verificamos o efeito numericamente e experimentalmente utilizando um modulador espacial de luz e o espectro angular nos deu uma visão clara das restrições que devem ser tomadas no espaço recíproco para que o efeito seja verificado.

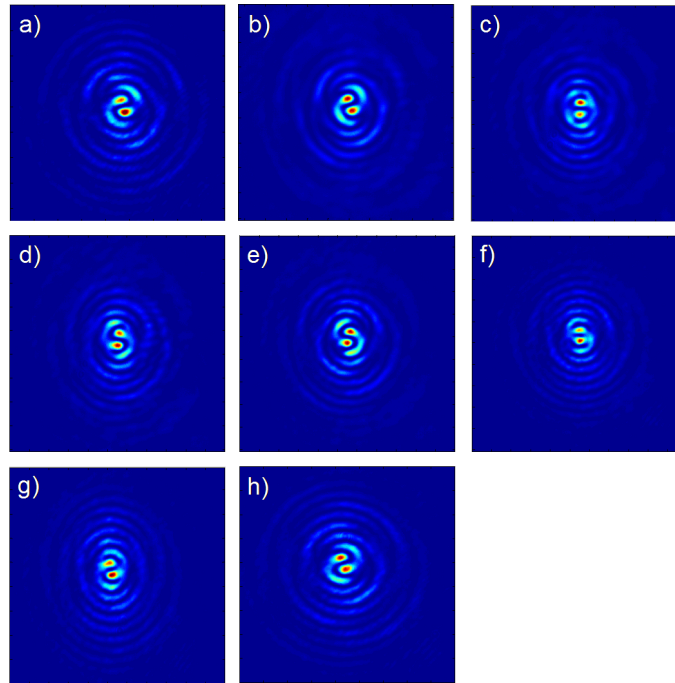


Figura 2.5: Resultados experimentais dos modos Hermite-Bessel de alta ordem. a) HB_{22} e b) HB_{11} .

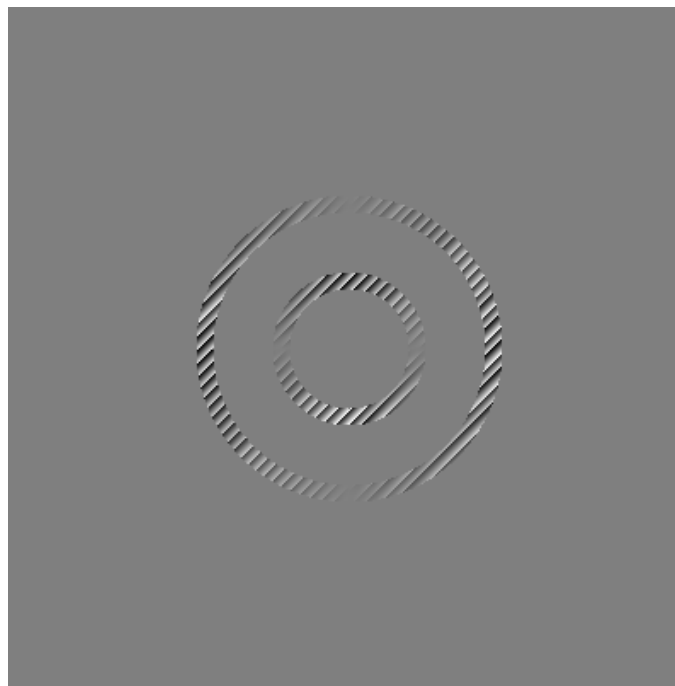


Figura 2.6: Holograma enviado ao modulador espacial utilizado para gerar o feixe com a propriedade de auto-imagem.

Capítulo 3

Auto-reconstrução em Feixes Hermite-Bessel

Neste capítulo discutiremos uma propriedade muito interessante que alguns feixes ópticos possuem. Eles, aparentemente, são imunes à obstáculos no seu caminho de propagação[17]. Feixes Bessel já foram estudados e mostrou-se possuírem essa propriedade em meios lineares[18] e não-lineares[19]. Propriedades auto-reconstrutivas de Feixes Bessel fracionários também foram estudadas em [20]. Feixes de Airy também foram estudados recentemente [21] e ainda mais recente um artigo tratou de microscopia óptica envolvendo feixes que se auto-reconstroem[22]. Mostraremos que os feixes Hermite-Bessel possuem essa propriedade de auto-reconstrução com ilustrações numéricas e através de um experimento.

3.1 Teoria

O problema aqui é calcular o perfil transversal de intensidade do feixes após passar por um obstáculo situado em $z = 0$ utilizando o espectro angular de ondas planas

discutido no capítulo 1. A integral a ser resolvida é seguinte

$$E(r) = \int \int A(k_x, k_y) e^{i[k^2 - (k_x^2 + k_y^2)]^{1/2} z} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (3.1)$$

onde

$$A(k_x, k_y) = \int \int t(x, y) E(x, y, z = 0) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (3.2)$$

e $t(x, y)$ representa a função transmissão da abertura. No nosso caso estudamos um obstáculo circular de raio b situado no centro do nosso feixe, então $t(x, y) = 1$ para $x^2 + y^2 \leq b^2$ e $t(x, y) = 0$ para $x^2 + y^2 > b^2$. O resultado das simulações é mostrado na figura 3.1. Em (3.1a) é mostrado o perfil de intensidade inicial do feixe, em 3.1(b-f) capturamos imagens de planos perpendiculares à direção de propagação do feixe. Observe que truncamos nosso feixe inicial para minimizar efeitos de borda na simulação, mas a auto-reconstrução do feixe é evidente ainda nessa aproximação.

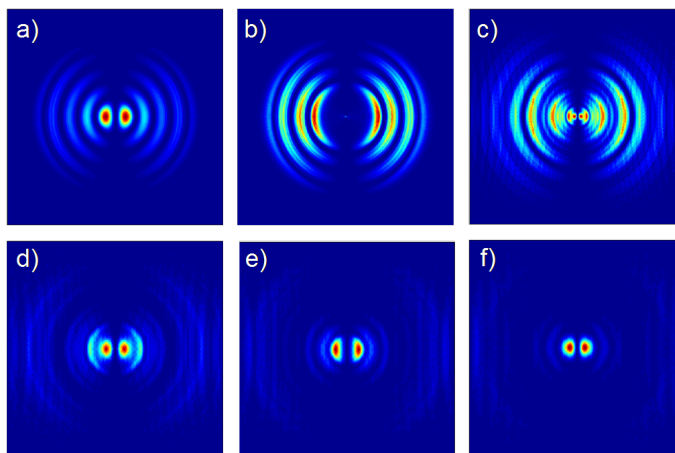


Figura 3.1: Esquema demonstrando a “auto-reconstrução” de um feixe não-difratante.

Como explicar a auto-reconstrução de um feixe? Vamos invocar o espectro angular de ondas planas mais uma vez para fornecer uma explicação para esse efeito. No capítulo 1 mostramos que o espectro angular descreve qualquer feixe como uma

superposição linear de ondas planas com diferentes fases relativas. Para o caso de feixes não-difratantes as fases relativas não se alteram durante a propagação e os vetores de onda se propagam na superfície de um cone. Agora observe a figura 3.2 e note o que acontece quando colocamos um obstáculo no caminho de propagação do feixe. Fica claro agora porque obtemos esse efeito aparente de auto-reconstrução. O feixe se reconstrói porque as componentes de ondas planas passam pelo obstáculo e continuam a se interferir depois. Na teoria, as ondas planas são infinitas, isto é, existem por todo o espaço, portanto, a interferência deve continuar infinitamente e independente de qualquer obstáculo no caminho. No laboratório, como nossas ondas planas são finitas, nosso feixe se reconstrói e se propaga até uma certa distância até ter uma difração considerável em suas dimensões espaciais.

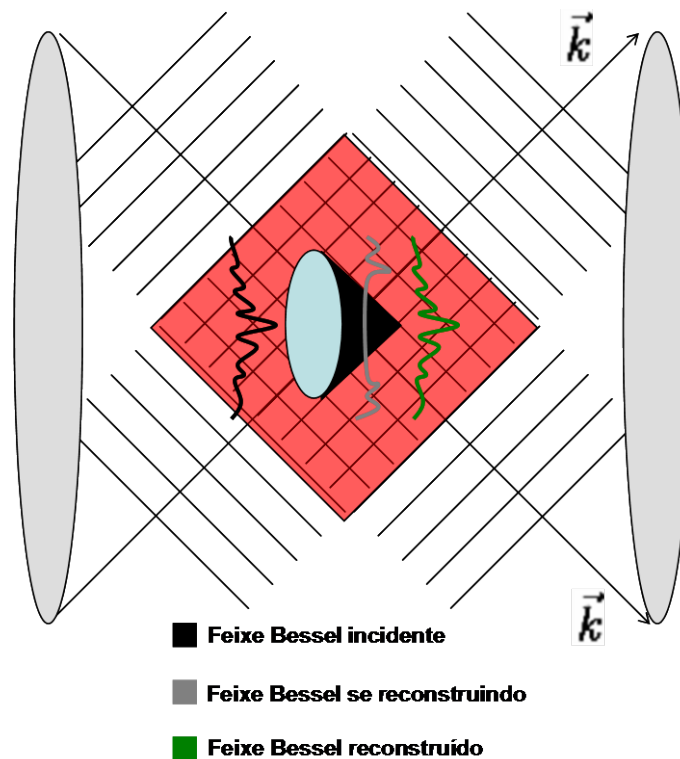


Figura 3.2: Esquema demonstrando a auto-reconstrução de um feixe não-difratante.

Com isso, explicamos a auto-reconstrução de qualquer feixe não-difratante, isto é, de qualquer feixe que possua seus vetores de onda confinados na superfície de um cone. Um caso interessante, e que não pode ser explicado com base nessa descrição, ocorre com os feixes de Airy[21], onde os autores explicam a auto-reconstrução do feixe através do vetor de Poynting.

3.2 Experimento

O aparato experimental utilizado para verificar o efeito de auto-reconstrução do feixe Hermite-Bessel é idêntico ao aparato usado para a auto-imagem, exceto que que antes do feixe incidir na CCD, colocamos um obstáculo circular (um pedaço de vidro com um pingo de tinta preta foi usado) no seu trajeto de propagação, como ilustrado na figura 3.3

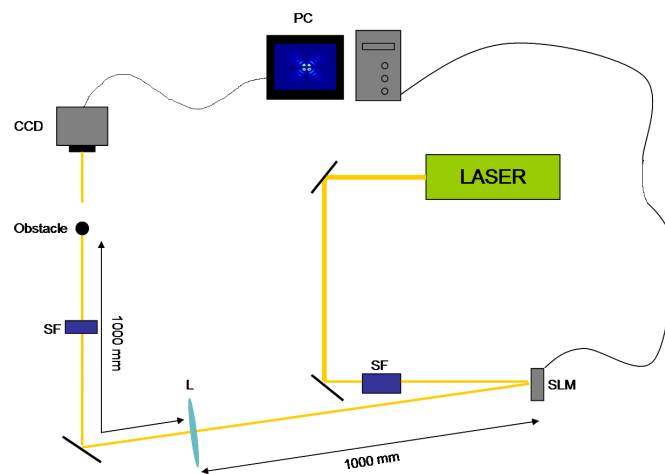


Figura 3.3: Aparato experimental utilizado para demonstrar a auto-reconstrução de um feixe não-difratante.

Capturando imagens para cada valor de z atrás do obstáculo, podemos verificar a reconstrução do campo. O resultado experimental é mostrado na figura 3.4

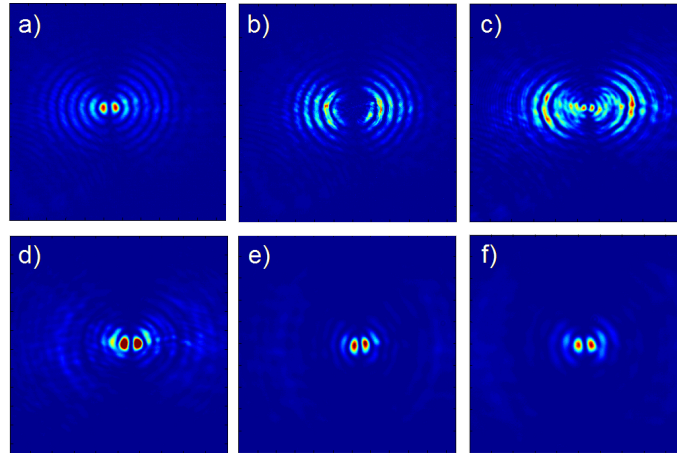


Figura 3.4: Esquema demonstrando a “auto-reconstrução” de um feixe não-difratante.

Obtemos, assim, uma boa concordância entre as simulações numéricas e o experimento.

Nosso objetivo aqui não foi fazer uma análise minuciosa do efeito de auto-reconstrução calculando parâmetros como a distância de propagação e a influência dessa distância com o tamanho do obstáculo, etc, apenas queremos mostrar que os feixes Hermite-Bessel possuem tal propriedade de se auto-reconstruírem, e com os resultados da figura 3.4 concluímos nosso objetivo.

Capítulo 4

Feixes Hermite-Bessel de alta ordem

No capítulo 1 mostramos que podemos decompor os feixes Bessel de ordem ± 1 em termos de uma nova classe de modos chamados Hermite-Bessel cujas propriedades foram estudadas nos capítulos anteriores.

Neste capítulo, vamos mostrar que podemos utilizar novas ordens dos feixes Hermite-Bessel para decompor as altas ordens do feixe Bessel e fazer uma analogia com a Esfera de Poincaré que será introduzida adiante.

4.1 A esfera de Poincaré

Considere uma onda plana se propagando na direção z com polarização perpendicular a direção de propagação. O vetor campo elétrico pode ser escrito na seguinte forma:

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re} \left\{ \vec{A} \exp[i(\omega t - kz)] \right\}$$

onde ω é a frequência angular do feixe, k é o vetor de onda e $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y}$ é um vetor complexo que descreve a polarização da onda. Expressando A_x e A_y em

termos de sua amplitude e fase temos que

$$A_x = a_x e^{i\varphi_x}$$

$$A_y = a_y e^{i\varphi_y}$$

e substituindo na equação para o campo, ficamos com

$$\vec{E}(z, t) = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$$

onde

$$E_x = a_x e^{i(\omega t - kz + \varphi_x)}$$

$$E_y = a_y e^{i(\omega t - kz + \varphi_y)}$$

As componentes E_x e E_y satisfazem a equação de uma elipse dada por[23]

$$\frac{E_x^2}{a_x^2} + \frac{E_y^2}{a_y^2} - 2 \cos \varphi \frac{E_x E_y}{a_x a_y} = \sin^2 \varphi$$

onde $\varphi = \varphi_x - \varphi_y$ é a diferença de fase entre as duas componentes. Podemos caracterizar o estado de polarização de acordo com a forma dessa elipse através de dois ângulos definidos na figura 4.1. O ângulo ψ determina a direção do eixo maior e o ângulo χ determina a elipticidade (b/a). Os ângulos ψ e χ dependem da razão $r = a_y/a_x$ e da diferença de fase φ de acordo com as seguintes relações[23]

$$\tan 2\psi = \frac{2r}{1 - r^2} \cos \varphi$$

$$\sin 2\chi = \frac{2r}{1 + r^2} \sin \varphi$$

$$r = \frac{a_y}{a_x}$$

$$\varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

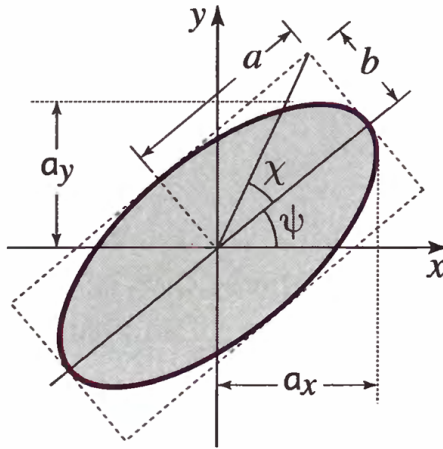


Figura 4.1: Elipse usada para caracterizar os estados de polarização da luz.

Temos dois parâmetros reais para caracterizar o estado de polarização da luz, i.e. $r = a_y/a_x$ e $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$. Podemos, alternativamente, tomar uma visão geométrica para o estado de polarização utilizando os dois ângulos ψ e χ definidos acima. Imagine uma esfera de raio unitário ($R = 1$) e um ponto com coordenadas angulares $\theta = \pi/2 - 2\chi$ e $\phi = 2\psi$. Tal esfera é chamada **Esfera de Poincaré**. Por exemplo, para polarização linear temos que $\chi = 0$ pois assim temos a elipticidade sendo nula e, conseqüentemente, $\theta = \pi/2$. Logo, polarizações lineares estão situadas no Equador da esfera de Poincaré e assim por diante. A figura 4.2 ilustra a decomposição na esfera de um modo geral.

Podemos nos “mover” pela esfera de Poincaré utilizando elementos ópticos. Por exemplo, placas de meia onda transformam luz circularmente polarizada à direita em luz circularmente polarizada à esquerda (ou seja, nos movemos do norte da esfera para o sul), e vice-versa. Além disso, podemos usar como base qualquer estado de polarização da esfera, por exemplo, podemos escrever um estado de polarização circular como uma superposição coerente de estados de polarização lineares com uma diferença de fase de $\pi/2$ entre eles.

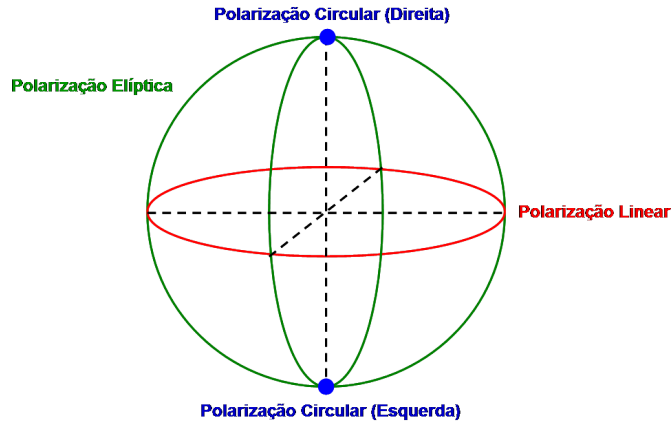


Figura 4.2: Esfera de Poincaré para os estados de polarização da luz.

4.2 Momento angular orbital da luz

Em 1936, R. A. Beth[24], fazendo um feixe de luz passar por uma placa de meia onda, fez a primeira medida do momento angular de **spin** da luz, medindo o torque que era transferido para a placa por causa da mudança de polarização circular à esquerda para polarização circular à direita (o momento angular transferido para a placa foi de $2\hbar$ por fóton). Desde então, foi aceito na comunidade científica que feixes de luz circurlamente polarizados possuem momento angular de spin.

Entretanto, é pouco conhecido que feixes de luz também podem possuir momento angular **orbital**. Allen e colaboradores[7] mostraram que feixes que possuem fase azimutal da forma $e^{il\phi}$ possuem momento angular orbital de $l\hbar$ por fóton. Os feixes estudados no artigo foram os modos Laguerre-Gauss, que são soluções da equação paraxial da onda em coordenadas cilíndricas. Feixes do tipo Bessel, que são descritos como $J_l(k_\rho r)e^{ik_z z}e^{il\phi}$, possuem o termo de fase da forma $\exp(il\phi)$, e possuem momento angular orbital de $l\hbar$ por fóton. O termo de fase de uma onda plana é da forma $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ e a superfície onde a fase é constante é dada pela equação

$\vec{k} \cdot \vec{r} = cte$, onde cte é uma constante, que é a equação de um plano, logo, as superfícies onde a fase é constante são planos. Já para um feixe que possui momento angular orbital, o termo de fase é do tipo $e^{il\phi}$, e a superfície onde a fase é constante é dada pela equação $l\phi = cte$, que descreve uma superfície helicoidal. Esse é o famoso giro da luz que faz com que um torque seja transferido para uma partícula dielétrica, por exemplo, devido ao momento angular orbital e não à pressão de radiação. As superfícies de fase constantes estão ilustradas na figura 4.3.

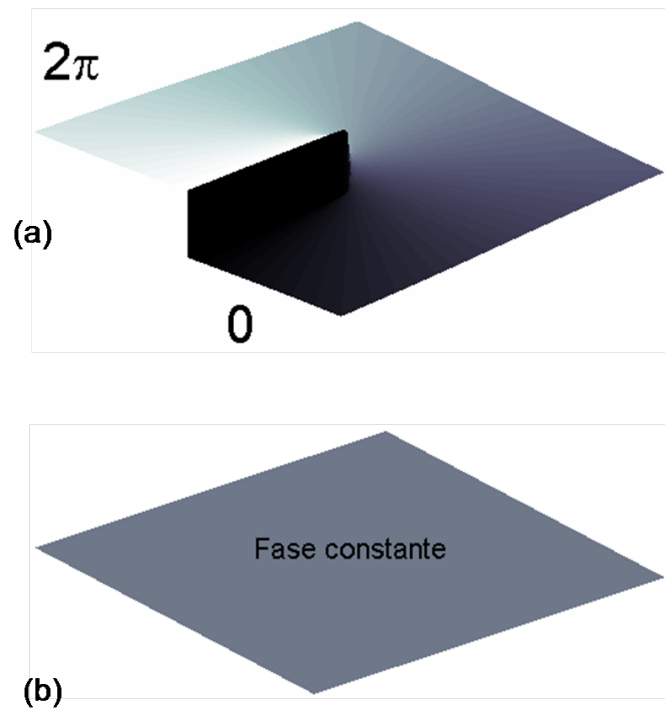


Figura 4.3: Variação espacial da fase em um plano $z = cte$. (a) Feixe possuindo momento angular orbital $l = 1$. (b) Onda plana.

Observe na figura 4.3(a) que no centro do feixe a fase é indefinida. Consequentemente, a amplitude do campo é nula naquele ponto. Uma integral de linha ao redor dessa singularidade nos dá um número inteiro l , chamado carga topológica do feixe. Várias técnicas experimentais foram propostas para medir cargas topológicas,

o “procedimento padrão” utiliza uma onda plana como referência, isto é, faz-se a interferência entre uma onda plana, colinear ou não, com o feixe cuja carga topológica se quer determinar. Dependendo do padrão de difração, pode-se caracterizar o estado de momento angular orbital de um feixe. Recentemente um novo método para calcular cargas topológicas foi proposto envolvendo aberturas triangulares[9]. Na figura 4.4 são mostrados resultados experimentais evidenciando feixes que possuem momento angular orbital. Em 4.4(a) o padrão de intensidade entre uma onda plana colinear com um feixe resulta em um padrão de intensidade do tipo espiral, onde o número de “braços das espirais” revelam o número da carga topológica (e, consequentemente, o estado de momento angular orbital do feixe). Em 4.4(b), o campo distante de um feixe possuindo carga topológica $l = 2$ é capturado após passar por uma abertura triangular. Nesse caso, o número de máximos na lateral do triângulo subtraído de um, revela o número da carga topológica, que no caso da 4.4(b) vale 2.

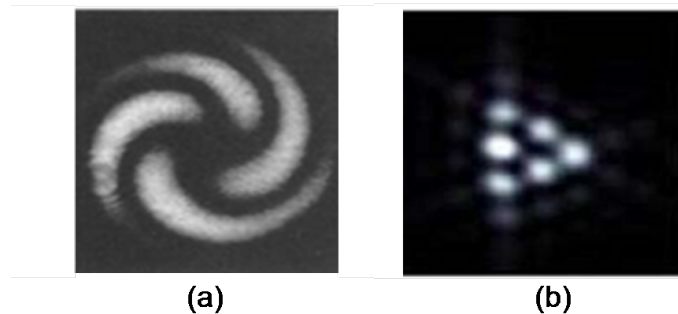


Figura 4.4: Resultados experimentais para determinação da carga topológica de um feixe. (a) Padrão de intensidade resultante da interferência de uma onda plana colinear. Retirado de [8]. (b) Padrão de intensidade do feixe após passar por uma abertura triangular. Retirado de [9]

Pensando nisso, M. J. Padgett e J. Courtial[25] criaram uma esfera de Poincaré para feixes que possuem momento angular orbital. No artigo, utilizaram as primeiras ordens dos feixes Laguerre-Gauss e a analogia de elementos ópticos para

fazer a transformação na esfera. Neste caso, como as primeiras ordens dos feixes Laguerre-Gauss possuem momento angular orbital de $\pm\hbar$ dependendo do valor de $l = \pm 1$, eles ocupam o norte e o sul da esfera. Os estados do Equador são descritos pelos modos Hermite-Gauss. A figura 4.5 ilustra a decomposição.

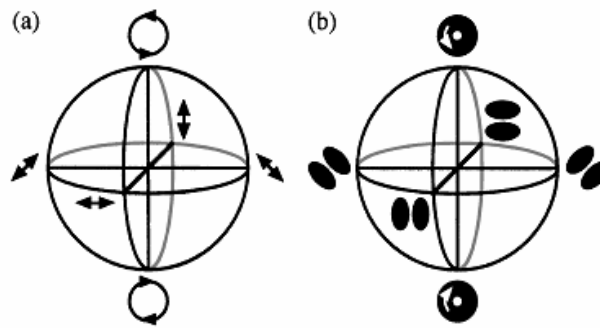


Figura 4.5: Esfera de Poincaré para os estados de (a) polarização e de (b) momento angular orbital da luz. Retirado de [25].

Então, por exemplo, se quisermos transformar um modo Laguerre-Gauss com momento angular orbital de $+\hbar(l = 1)$ em um modo Laguerre-Gauss com momento angular orbital de $-\hbar(l = -1)$ devemos cruzar toda a esfera de Poincaré até o sul; para isso podemos usar um conversor π . Além disso, note também que podemos escrever qualquer modo da esfera como uma combinação linear dos outros modos com uma diferença de fase, assim como no caso de polarizações lineares e circulares. A questão a ser enfatizada aqui é que os modos Hermite-Gauss (que são soluções da equação paraxial em coordenadas cartesianas) são os modos que pertencem ao Equador da esfera de Poincaré para momento angular orbital.

A pergunta que iremos responder agora é a seguinte: Se colocarmos os feixes Bessel de ordens ± 1 no norte e no sul da esfera de Poincaré, quais modos ocupam o Equador?

4.3 Esfera de Poincaré para feixe Bessel de ordem ± 1

Como demonstrado no capítulo 1, podemos decompor os feixes Bessel de ordem ± 1 em termos dos modos Hermite-Bessel[11]:

$$BB_1 = k_\rho[HB_{10} + iHB_{01}]e^{ik_z z} \quad (4.1)$$

$$BB_{-1} = k_\rho[HB_{10} - iHB_{01}]e^{ik_z z} \quad (4.2)$$

$$HB_{+45^\circ} = HB_{10} + HB_{01} \quad (4.3)$$

$$HB_{-45^\circ} = HB_{10} - HB_{01} \quad (4.4)$$

onde $BB_{\pm 1}$ denota os feixes Bessel de ordem ± 1 . Tal decomposição também existe para feixes Laguerre-Gauss em termos dos modos Hermite-Gauss[25]. A resposta para a pergunta formulada na seção anterior é direta: Os modos Hermite-Bessel ocupam o Equador na esfera de Poincaré para feixes Bessel. A figura 4.6 ilustra a decomposição.

Vemos, então, que os feixes Hermite-Bessel, estudados nos capítulos anteriores, são a decomposição dos feixes Bessel de ordem ± 1 na esfera de Poincaré. A analogia entre estados de polarização continua a mesma, modos Bessel podem ser escritos como combinações lineares de modos Hermite-Bessel e vice-versa. Nossa próxima pergunta é a seguinte: Quais modos ocupam o Equador da esfera de Poincaré para feixes Bessel de ordem ± 2 ? Veremos que desta forma obteremos os feixes Hermite-Bessel de alta ordem, até agora, desconhecidos na literatura.

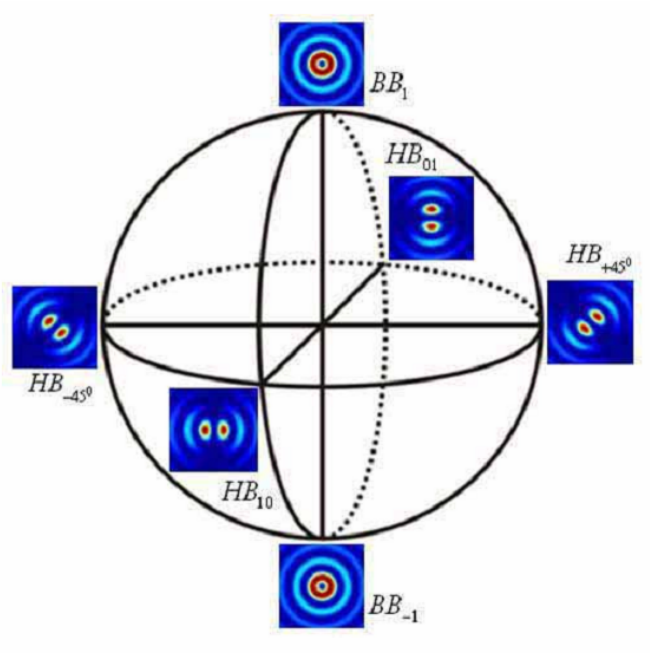


Figura 4.6: Esfera de Poincaré para feixes Bessel de ordem ± 1 .

4.4 Esfera de Poincaré para feixe Bessel de ordem ± 2

Iremos mostrar agora que é possível decompor feixes Bessel de ordem ± 2 em termos de outros dois modos de forma análoga a que foi feita nos trabalhos citados anteriores envolvendo a esfera de Poincaré. De fato, a decomposição é válida para feixes Bessel de qualquer ordem, como veremos, porém, nesta dissertação, apenas os modos HB_{11} e HB_{22} (definidos adiante) serão estudados.

Vamos começar com a equação introduzida no capítulo 1:

$$BB_l = \frac{k_\rho^l}{2l} \frac{e^{ik_z z}}{(k_\rho r)^{l-1}} [J_{l+1} + J_{l-1}] (x + iy)^l \quad (4.5)$$

onde o argumento das funções de Bessel é $k_\rho r$. Para $l = 2$ ficamos com

$$BB_2 = \frac{k_\rho^2 e^{ik_z z}}{4k_\rho r} [J_3 + J_1] (x^2 + 2xyi - y^2)$$

utilizando a relação $\frac{2l}{x}J_l(x) = J_{l-1}(x) + J_{l+1}(x)$, temos

$$BB_2 = \frac{k_\rho^2 e^{ik_z z}}{24} [3J_0 + 4J_2 + J_4] (x^2 + 2xyi - y^2)$$

note que $x^2 - y^2 = \frac{1}{4}[H_2(x) - H_2(y)]$ e $2xy = \frac{1}{2}H_1(x)H_1(y)$ onde H_v é o polinômio de hermite de grau v . Podemos escrever, então

$$BB_2 = \frac{k_\rho^2}{24} (HB_{22} + iHB_{11}) \quad (4.6)$$

onde

$$HB_{22} = \frac{1}{4} e^{ik_z z} [3J_0 + 4J_2 + J_4] [H_2(x) - H_2(y)]$$

$$HB_{11} = \frac{1}{2} e^{ik_z z} [3J_0 + 4J_2 + J_4] H_1(x) H_1(y)$$

Se considerássemos $l = -2$ chegaríamos, de forma análoga, na seguinte relação:

$$BB_{-2} = \frac{k_\rho^2}{24} (HB_{22} - iHB_{11}) \quad (4.7)$$

As equações (4.6) e (4.7) mostram que podemos decompor o feixe Bessel de ordem 2 em termos de outros dois modos, que chamaremos de feixes Hermite-Bessel de alta ordem. De forma geral:

$$BB_{\pm 2} = \frac{k_\rho^2}{24} (HB_{22} \pm iHB_{11}) \quad (4.8)$$

$$HB_{22} = \frac{12}{k_\rho^2} (BB_2 + BB_{-2}) \quad (4.9)$$

$$HB_{11} = \frac{12}{k_\rho^2} (BB_2 - BB_{-2}) \quad (4.10)$$

e também temos que

$$HB_{+45^\circ} = HB_{22} + HB_{11} \quad (4.11)$$

$$HB_{-45^\circ} = HB_{22} - HB_{11} \quad (4.12)$$

Na figura (4.7) é mostrado o perfil de intensidade dos dois modos e na figura 4.8 o resultado experimental utilizando um modulador espacial da luz. Observe também que os modos são não-difratantes da maneira como foi descrita no capítulo 1.

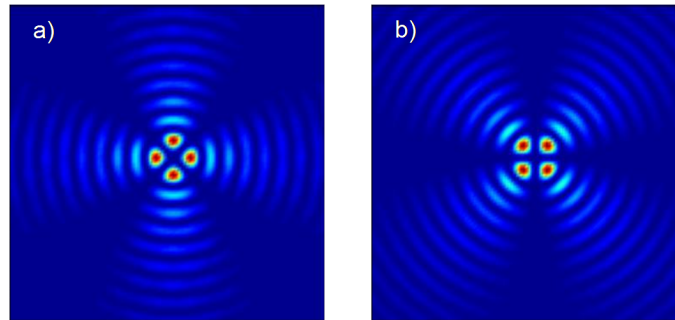


Figura 4.7: Modos Hermite-Bessel de alta ordem. a) HB_{22} e b) HB_{11} .

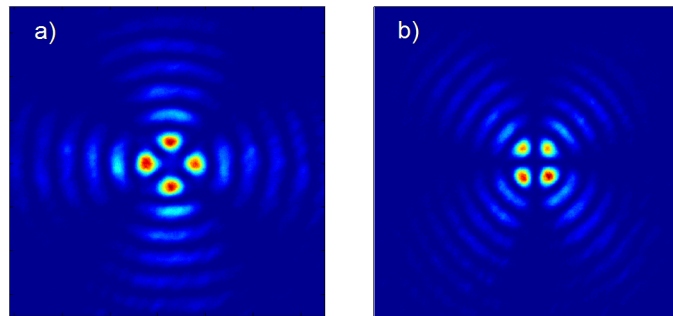


Figura 4.8: Resultados experimentais dos modos Hermite-Bessel de alta ordem. a) HB_{22} e b) HB_{11} , utilizando um modulador espacial de luz.

Formamos, assim, nossa esfera de Poincaré para feixes Bessel de ordem ± 2 como ilustra a figura 4.9. As equações acima mostram que podemos escrever cada modo do Equador como uma combinação linear dos modos no norte e sul da esfera de Poincaré de maneira análoga aos estados de polarização da luz. As propriedades dos feixes Hermite-Bessel de alta ordem ainda são objetos de estudos, de modo que neste trabalho nos preocupamos somente em apresentar tal decomposição e sua

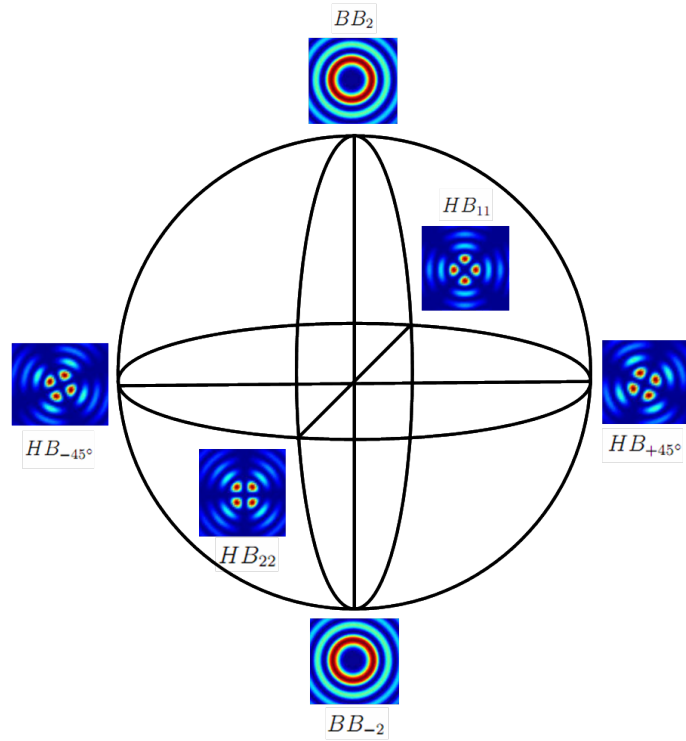


Figura 4.9: Resultados experimentais dos modos Hermite-Bessel de alta ordem. a) HB_{22} e b) HB_{11} .

base matemática. Na próxima seção iremos descrever o espectro angular dos modos Hermite-Bessel de alta ordem.

4.5 Espectro angular dos feixes Hermite-Bessel de alta ordem

Sabemos do capítulo 1 que o espectro angular do feixe HB_{10} é dado por $\Lambda(\phi) = \cos \phi$ e o espectro angular do feixe HB_{01} é dado por $\Lambda(\phi) = \sin \phi$. Mostramos como podemos chegar a uma generalização do espectro angular para os modos de alta ordem.

Primeiramente note que nosso objetivo é escrever os feixes Bessel de alta ordem como uma combinação linear de feixes Hermite-Bessel de alta ordem, e, como

sabemos que o espectro angular do feixe Bessel de ordem l é dado por $\Lambda(\phi) = e^{il\phi}$, escrevemos:

$$E(r, \theta, z) = \int_0^{2\pi} e^{il\phi} e^{ik_{\rho 0} r \cos(\theta - \phi)} d\phi = \int_0^{2\pi} \cos l\phi e^{ik_{\rho 0} r \cos(\theta - \phi)} d\phi + i \int_0^{2\pi} \sin l\phi e^{ik_{\rho 0} r \cos(\theta - \phi)} d\phi$$

Note que se $l = \pm 1$, recuperamos os resultados da seção (1.3.2) e se $l = \pm 2$ temos os resultados da seção (4.3). É evidente, então, que o espectro angular para os modos de alta ordem do feixe Hermite-Bessel são dados por:

$$A_{\cos}^l = \cos(l\phi) \quad (4.13)$$

e

$$A_{\sin}^l = \sin(l\phi) \quad (4.14)$$

Na Figura 4.10 representamos o perfil transversal de intensidade para caso $l = 3$. Em 4.10(a) é mostrado o perfil para A_{\cos}^3 , em 4.10(b) é mostrado o perfil para A_{\sin}^3 e em 4.10(c) para a superposição com uma diferença de fase de $\pi/2$, donde obtemos o feixe Bessel de ordem 2.

De fato, apesar de ainda não existir uma fórmula geral para escrever HB_{nm} , simulações numéricas mostram que esta é realmente a decomposição correta (de modo que suas combinações lineares gerem os feixes Bessel e vice-versa). Um resumo dos resultados da generalização é mostrado na Figura 4.11.

Conclusão: A modulação do anel no espaço das frequências para os modos HB de alta ordem, é dada pelo valor do seno ou do cosseno de um múltiplo inteiro do ângulo azimutal.

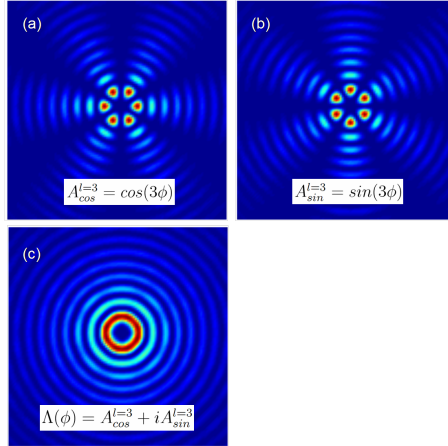


Figura 4.10: Modo Hermite-Bessel para $l = 3$. (a) Intensidade para o espectro angular A_{\cos}^3 . (b) Intensidade para o espectro angular A_{\sin}^3 e (c) Feixe Bessel de ordem 2 obtido com o espectro angular da superposição de (a) e (b) com uma diferença de fase de $\pi/2$.

4.6 Conclusão

Neste capítulo introduzimos a esfera de Poincaré para feixes polarizados, onde cada ponto na superfície da esfera representa um estado de polarização. Mostramos que uma esfera de Poincaré para feixes com momento angular orbital pode existir e construímos duas delas, uma para feixes Bessel de ordens ± 1 e outra para ordens ± 2 de onde surgiram os feixes Hermite-Bessel. Finalizamos descrevendo o espectro angular para as altas ordens do feixe Hermite-Bessel.

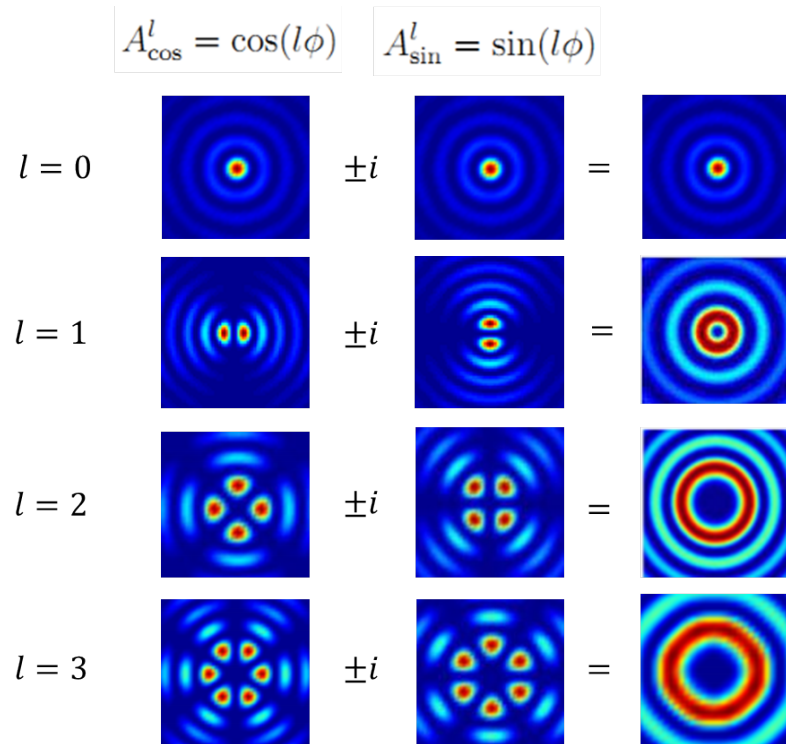


Figura 4.11: Resumo da generalização da esfera de Poincaré para feixes Bessel de ordem l . A figura também ilustra as combinações lineares dos modos Hermite-Bessel de alta ordem necessárias para obter os feixes Bessel.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

No capítulo 1 introduzimos o conceito de feixe não-difratante, termo primeiramente usado por J. Durnin partindo de uma análise do espectro angular. Mostramos comparações de intensidade entre o feixe Bessel e o Gaussiano durante a propagação no espaço livre. Mais adiante introduzimos os feixes Hermite-Bessel cujas propriedades de auto-imagem e auto-reconstrução foram estudadas, teoricamente e experimentalmente, nos capítulos 2 e 3. No capítulo 4 apresentamos a esfera de Poincaré para feixes com momento angular orbital, e isso nos levou naturalmente aos feixes Hermite-Bessel de alta ordem cujas propriedades ainda serão temas de um trabalho futuro.

Podemos citar como perspectivas, o trabalho envolvendo efeitos de auto-imagem e auto-reconstrução para feixes Hermite-Bessel de altas ordens. Outro ponto não considerado nesta dissertação, foi o fato de que a superposição criada para se obter o efeito de auto-imagem no capítulo 2, possui momento angular orbital em regiões restritas do espaço. Tais estudos merecem uma atenção no futuro.

Referências

- [1] J. Durnin, “Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory,” *J. Opt. Soc. Am. A* 4, 932-942 (1987)
- [2] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, New York, 1996), 2nd ed.
- [3] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, 7th expanded and corrected ed. 2002
- [4] J. Durnin et al. “Diffraction-free beams,” *Phys. Rev. Lett.* 58 1499-501 (1987)
- [5] W. D. Montgomery, “Self-imaging objects of infinite aperture,” *J. Opt. Soc. Am.* 58, 1112-1124 (1968)
- [6] J. Jahns, H. Knuppertz, A. W. Lohmann, “Montgomery self-imaging effect using computer-generated diffractive optical elements,” *Opt. Commun.* 225, 13-17 (2003)
- [7] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, J. P. Woerdman, “Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes,” *Phys. Rev. A* 45, 8185-8189 (1992)

- [8] M. Harris, C. A. Hill, J. M. Vaughan, “Optical helices and spiral interference fringes”, *Opt. Commun.* **106**, 161 (1994)
- [9] J. M. Hickmann, E. J. S. Fonseca, W. C. Soares, S. Chávez-Cerda, “Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light’s orbital angular momentum,” *Phys. Rev. Lett.* 105, (2010)
- [10] L. Allen, S. M. Barnett, M. J. Padgett, *Optical Angular Momentum* (Institute of Physics Publishing, London, 2003)
- [11] W. C. Soares, D. P. Caetano, J. M. Hickmann, “Hermite-Bessel beams and the geometrical representation of nondiffracting beams with orbital angular momentum,” *Opt. Express* 14, 4577-4582 (2006)
- [12] W. C. Soares, “Representação geométrica de feixes não difratantes possuindo momento angular orbital,” *Dissertação de mestrado, UFAL* (2006)
- [13] H. Talbot, “Facts relating to optical science”, *Phil. Mag.* 9, 401-407 (1836)
- [14] Lord Rayleigh, “On copying diffraction-gratings, and on some phenomena connected therewith”, *Phil. Mag.* 11, 196 (1881)
- [15] S. Chavez-Cerda, E. Tepichin, A. Meneses-Nava, G. Ramirez, and J. M. Hickmann, “Experimental observation of interfering Bessel beams,” *Opt. Express* 3, 524-529 (1998)
- [16] J. Tervo, J. P. Turunen, “Self-imaging of electromagnetic fields,” *Opt. Express* 9, 622-630 (2001)

- [17] Z. Bouchal, J. Wagner, “Self-reconstruction effect in free propagation of wave-field,” *Opt. Commun.* 176, 299-307 (2000)
- [18] Z. Bouchal, J. Wagner, M. Chlup, “Self-reconstruction of a distorted nondiffracting beam,” *Opt. Commun.* 151, 207-211 (1998)
- [19] S. Sogomonian, S. Klewitz, S. Herminghaus, “Self-reconstruction of a Bessel beam in a nonlinear medium”, *Opt. Commun.* 139, 313-319 (1997)
- [20] S. H. Tao, X. Yuan, “Self-reconstruction property of fractional Bessel beams,” *J. Opt. Soc. Am. A* 21, 1192-1197 (2004)
- [21] J. Broky, G. A. Siviloglou, A. Dogariu, D. N. Christodoulides, “Self-healing properties of optical Airy beams,” *Opt. Express* 16, 12880-12891 (2008)
- [22] F. O. Fahrbach, P. Simon, A. Rohrbach, “Microscopy with self-reconstructing beams,” *Nature Photon.*, Vol. 4, 780-785 (2010)
- [23] B. E. A. Saleh, M. C. Teich, Eds., *Fundamentals of Photonics* (Wiley, New York, 1991).
- [24] R. A. Beth, “Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light”, *Phys. Rev.* 50, 1151-1152 (1936)
- [25] M. J. Padgett, J. Courtial, “Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum,” *Opt. Lett.* 24, 430-432 (1999)

1

Neste apêndice apresentaremos os algoritmos usados para o cálculo do campo utilizando o espectro angular. O Software usado foi o Matlab versão 7.10.0 (R2010a).

O primeiro algoritmo plota a intensidade a partir do espectro angular.

```
clear all;

np = 2^9 ;

L = 160;
kx = linspace(-L,L,np+1);
kx = kx(1:np);
kxmin = 2*L/np;
xmax = 2*pi/kxmin;
x = linspace(-xmax/2,xmax/2,np+1);
x = x(1:np);
[kx,ky] = meshgrid(kx);
[x,y] = meshgrid(x);

[ph,r] = cart2pol(x,y);
[phk,p] = cart2pol(kx,ky);

Ap = ones(np,np);
Ap(p<25) = 0;
Ap(p>27) = 0;
A = Ap.*cos(2*phk);
uf = fftshift(fft2(A));

figure(2); pcolor(abs(uf.*conj(uf))); axis square;
shading interp; axis([200 310 200 310]);
```

Neste próximo algoritmo, calculamos o perfil transversal de intensidade do feixe HB_{01} após passar por um obstáculo circular localizado no centro do feixe.

```

clear all
nx = 2^9;
lz = 1e-5;
nz = 50.0;
dz = lz./nz;
lam = 532e-9;
kk=(2*pi)/lam;
%-----Espaço real-----
xmin = -5e-6;
xmax = 5e-6;
x = linspace(xmin, xmax, nx+1);
x = x(1:nx);
[x,y] = meshgrid(x);
[ph,r]=cart2pol(x,y);
%----Espaço recíproco-----
k = (-nx/2:nx/2-1)*2*pi/(xmax-xmin);
[kx,ky] = meshgrid(k);
%-----Campo em z = 0-----
u = (besselj(0,0.5*kk*r)+besselj(2,0.5*kk*r)).*y.*(r>1.2e-6);
%---Propagador-----
prop = exp(1i*dz.*sqrt(((2*pi/lam).^2)-((kx.^2)+(ky.^2))));
%-----
z=0;

for ii = 1:nz;
    u = ifft2(fftshift(prop).*fft2(u));
    w=abs(u).^2;
    pcolor(x,y,abs(u).^2); shading flat; axis square; drawnow;
    z=dz+z;
end

```

E, por fim, o último programa ilustra o efeito de auto-imagem obtido através da superposição coerente dos dois modos HB_{10} e HB_{01} com vetores de onda transversais diferentes.

```

clear all
nx = 2^9;
lz = 1e-5;
nz = 50.0;
dz = lz./nz;
lam = 532e-9;
kk=(2*pi)/lam;
%-----Espaço real-----
xmin = -5e-6;
xmax = 5e-6;
x = linspace(xmin, xmax, nx+1);
x = x(1:nx);
[x,y] = meshgrid(x);
[ph,r]=cart2pol(x,y);
%----Espaço recíproco-----
k = (-nx/2:nx/2-1)*2*pi/(xmax-xmin);
[kx,ky] = meshgrid(k);
%-----Campo em z = 0-----
u01 = (besselj(0,0.5*kk*r)+besselj(2,0.5*kk*r)).*y;
u10 = (besselj(0,0.7*kk*r)+besselj(2,0.7*kk*r)).*x;
u = u10+u01;
%---Propagador-----
prop = exp(1i*dz.*sqrt(((2*pi/lam).^2)-((kx.^2)+(ky.^2))));
%-----
z=0;

for ii = 1:nz;
    u = ifft2(fftshift(prop).*fft2(u));
    w=abs(u).^2;
    pcolor(x,y,abs(u).^2); shading flat; axis square; drawnow;

```

```
z=dz+z;  
end
```